Gheorghe Potcovaru

PROBLEME DE ALGEBRĂ ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE

Editura Universității din București

GHEORGHE POTCOVARU

PROBLEME DE ALGEBRĂ ŞI ECUAŢII DIFERENŢIALE

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI
2003

Referenți științifici: Conf. dr. **Paraschiv Balea**
Lect. dr. **Maria Joița**

Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Tehnoredactare computerizată: conf. dr. **Gheorghe Potcovaru**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale României
POTCOVARU, GHEORGHE
Probleme de Algebră și Ecuații Diferențiale / Gheorghe Potcovaru - București: Editura Universității din București, 2003
208 p.
Bibliografie
ISBN 973-575-743-5

512(075.8)(076)

Cuprins

Capitolul 1

Noţiuni fundamentale

1. Fie A, B, C, M şi M_i, pentru $i \in I$, submulţimi arbitrare ale unei mulţimi T. Verificaţi următoarele proprietăţi:

   (a) $A \cup B \subset T$, $A \cap B \subset T$;

   (b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea reuniunii şi a intersecţiei);

   (c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitatea reuniunii şi intersecţiei);

   (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune şi a reuniunii faţă de intersecţie);

   (e) $A \cup A = A = A \cap A$ (proprietatea de idempotenţă);

   (f) $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$;

   (g) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup T = T$, $A \cap T = A$;

   (h) $A \cup \mathcal{C}A = T$, $A \cap \mathcal{C}A = \emptyset$;

   (i) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$ (proprietatea de absorbţie);

   (j) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$, $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$ (formulele lui de Morgan);

   (k) $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$, $\mathcal{C}T = \emptyset$, $\mathcal{C}\emptyset = T$;

   (l) $\mathcal{C}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}M_i$;

   (m) $\mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}M_i$;

   (n) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap M_i)$;

(o) $A \cup \left(\bigcap\limits_{i\in I} M_i \right) = \bigcap\limits_{i\in I} (A \cup M_i)$;

(p) Dacă $M_i \subset M, \forall i \in I$, atunci $\bigcup\limits_{i\in I} M_i \subset M$;

(q) Dacă $M \subset M_i, \forall i \in I$, atunci $M \subset \bigcap\limits_{i\in I} M_i$;

(r) Dacă $M_i \subset M_{i+1}, \forall i \in \mathbf{N}$, atunci şirul $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{i\to\infty} M_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$$

(s) Dacă $M_{i+1} \subset M_i, \forall i \in \mathbf{N}$, atunci şirul $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{i\to\infty} M_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} M_i$$

2. .Fie $f : A \to B$ o funcţie dată, $A' \subset A$ şi $B' \subset B$. Verificaţi că:

(a) $f(A') \subset B$;

(b) $f^{-1}(B') \subset A$, $f^{-1}(B) = A$;

(c) $y \in f(A') \Longleftrightarrow \exists x \in A'$ astfel încât $y = f(x)$;

(d) $x \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow f(x) \in B'$;

(e) $f^{-1}(f(A')) \supset A'$;

(f) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$;

(g) f este surjectivă $\Longleftrightarrow Im(f) = B$.

3. Fie $f : A \to B$ o funcţie, $A'_1, A'_2 \in \mathcal{P}(A)$ şi $B', B'_1, B'_2 \in \mathcal{P}(B)$. În aceste condiţii au loc proprietăţile:

(a) $A'_1 \subset A'_2 \Rightarrow f(A'_1) \subset f(A'_2)$;

(b) $B'_1 \subset B'_2 \Rightarrow f^{-1}(B'_1) \subset f^{-1}(B'_2)$;

(c) $f^{-1}(\mathcal{C}B') = \mathcal{C}f^{-1}(B')$

4. Fie $f : A \to B$ o funcţie, $X_i \subset A$ şi $Y_i \subset B \ \ \forall i \in I$, unde I este o mulţime oarecare de indici. Demonstraţi că au loc următoarele relaţii:

(a) $f\left(\underset{i\in I}{\cup} X_i \right) = \underset{i\in I}{\cup} f(X_i)$;

(b) $f\left(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(X_i)$;

(c) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$;

(d) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

5. Fie A o mulţime nevidă şi $r \subset A \times A$ o relaţie de echivalenţă pe A. Clasele de echivalenţă determinate de r pe A au următoarele proprietăţi:

   (a) $a \in [a]_r$, $\forall a \in A$,

   (b) $\forall a, b \in A$, $[a]_r = [b]_r \Longleftrightarrow a\ r\ b$,

   (c) dacă $a, b \in A, a \not{r}\ b$ atunci $[a]_r \cap [b]_r =$,

   (d) Reuniunea tuturor claselor de echivalenţă este egală cu A.

6. Fie A o mulţime nevidă şi $r \subset A \times A$ o relaţie de echivalenţă. Mulţimea $\{a_i\}_{i\in I}$ de elemente din A se numeşte sistem de reprezentanţi relativ la r dacă $a_i \not{r}\ a_j$, pentru oricare $i \neq j$, şi pentru orice $a \in A$ există un indice $i \in I$ astfel încât $a\ r\ a_i$. Arătaţi că pentru orice mulţime nevidă A şi orice relaţie de echivalenţă $r \subset A \times A$ există un sistem de reprezentanţi relativ la r.

   Indicaţie: Mulţimea claselor de echivalenţă este nevidă şi este formată din mulţimi nevide, după cum rezultă din exerciţiul precedent. Notăm această mulţime prin $\{C_i\}_{i\in I}$. Folosind axioma alegerii deducem că există o mulţime de elemente $\{a_i\}_{i\in I}$, astfel încât $a_i \in C_i$ pentru fiecare $i \in I$. Rezultă că $[a_i]_r = C_i$, $a_i \not{r}\ a_j$ pentru $i \neq j$ (căci $C_i \cap C_j =$) şi $A = \bigcup\limits_{i\in I} C_i = \bigcup\limits_{i\in I} [a_i]_r$. Deducem că pentru orice $a \in A$ există un singur $i \in I$ pentru care $a \in [a_i]_r$. Deci $\{a_i\}_{i\in I}$ este un sistem de reprezentanţi relativ la r.

7. Fie $f : A \to B$ o funcţie şi $\sim$ o relaţie pe Adefinită astfel:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

   Arătaţi că $\sim$ este relaţie de echivalenţă.

8. Fie $f : A \to B$ o funcţie dată, $\sim$ relaţia de echivalenţă pe mulţimea A determinată de f, ca în exerciţiul 7, şi $p : A \to A/\sim$ surjecţia canonică. În aceste condiţii există o funcţie $\varphi : A/\sim \to B$, injectivă, astfel încât $f = \varphi \circ p$. Dacă f este surjectivă

atunci şi φ este surjectivă (deci bijectivă).

Indicaţie: Definim funcţia φ în felul următor: pentru fiecare element $[x]_\sim \in A/\sim$ definim $\varphi([x]_\sim) = f(x)$. Definiţia este corectă căci dacă $[x]_\sim = [x']_\sim$ atunci $x \sim x'$ şi deci $f(x) = f(x')$. În consecinţă

$$\varphi([x]_\sim) = f(x) = f(x') = \varphi([x']_\sim)$$

care ne arată că, indiferent cum este reprezentată clasa $[x]_\sim$ funcţia φ are o valoare bine determinată pe această clasă. Acum, pentru orice $x \in A$, avem:

$$(\varphi \circ p)(x) = \varphi(p(x)) = \varphi([x]_\sim) = f(x)$$

din care rezultă că $\varphi \circ p = f$. Considerăm două clase $[x]_\sim$ şi $[x']_\sim$ din $A/\sim$ distincte. Aşadar $x \not\sim x'$ şi în consecinţă $f(x) \neq f(x')$. Deci

$$\varphi([x]_\sim) \neq \varphi([x']_\sim)$$

ceea ce înseamnă că φ este injectivă. Să presupunem că f este surjectivă. Pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. În consecinţă $\varphi([x]_\sim) = f(x) = y$, din care rezultă că φ este surjectivă.

9. Fie $f : A \to B$ o funcţie dată, $\sim$ relaţia de echivalenţă pe mulţimea A determinată de f, ca în exerciţiul 7, $p : A \to A/\sim$ surjecţia canonică şi $i : Im(f) \to B$ incluziunea canonică. Atunci există o singură aplicaţie $\varphi : A/\sim \to Im(f)$ astfel încât $f = i \circ \varphi \circ p$ şi φ este bijectivă.

10. Mulţimea numerelor reale $\mathbf{R}$ înzestrată cu relaţia de ordine obişnuită este o latice.

11. Mulţimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subset)$ este o latice completă.

12. Arătaţi că orice mulţime ordonată $(X, \leq)$ este izomorfă cu o submulţime a lui $\mathcal{P}(X)$ ordonată de relaţia de incluziune.

    Indicaţie: Fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ funcţia definită prin

$$f(a) = A$$

unde $A = \{x \mid x \in X, x \leq a\}$ pentru orice $a \in X$. Observăm că $a \in f(a)$. Considerăm $a, b \in X$ şi cercetăm egalitatea $f(a) = f(b)$. Deducem că $a \in f(b)$ şi $b \in f(a)$, deci $a \leq b$ şi $b \leq a$, din care rezultă că $a = b$. Aşadar, din $f(a) = f(b)$

rezultă $a = b$, ceea ce înseamnă că f este injectivă. Vom arăta în continuare că f este izotonă. Considerăm $a, b \in X$ astfel încât $a \leq b$. Pentru oricare $x \in f(a)$ rezultă $x \leq a \leq b$, din care rezultă $x \in f(b)$, ceea ce înseamnă că am demonstrat incluziunea $f(a) \subset f(b)$, adică tocmai faptul că f este izotonă. În consecinţă deducem că mulţimea ordonată $(X, \leq)$ este izomorfă cu mulţimea ordonată $(Im(f), \subset)$.

13. Arătaţi că $A \subset B$, $C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$, $A \cap C \subset B \cap D$

14. Verificaţi relaţiile:

    (a) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$,

    (b) $(A - B) \cap B =$,

    (c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$,

    (d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$,

    (e) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$,

    (f) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

    (g) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$,

    (h) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

15. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulţimi. Arătaţi că

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

pentru oricare $j \in I$.

16. Fie $f : X \to Y$, $A \subset X$ şi $B \subset Y$. Arătaţi că:

    (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

    (b) $f(f^{-1}(B)) = B$.

17. Fie T o mulţime oarecare. Pentru fiecare $A \subset T$ se defineşte o funcţie

$$K_A : T \to \{0, 1\}$$

prin

$$K_A(t) = \begin{cases} 1 & \textit{dacă } t \in A \\ 0 & \textit{dacă } t \notin A \end{cases}$$

numită funcţia caracteristică (indicatoare) a mulţimii A.

Verificaţi egalităţile:

(a) $K_{A\cap B} = K_A \cdot K_B$,

(b) $K_{A\cup B} = K_A + K_B - K_A \cdot K_B$,

(c) $K_{CA} = 1 - K_A$,

(d) $K_{A-B} = K_A - K_A \cdot K_B$,

(e) A şi B sunt disjuncte $\Leftrightarrow K_{A\cup B} = K_A + K_B$.

18. Fie $M \neq \emptyset$ şi $r = \{(x,x) \mid x \in M\}$, relaţia *diagonală pe mulţimea* M. Arătaţi că r este relaţie de echivalenţă.

19. În $\mathbf{N}$ considerăm un număr $p \geq 2$. Definim o relaţie binară între elementele lui $\mathbf{Z}$ prin

$$r = \{(x,y) \mid x - y \text{ se divide cu } p\}$$

Vom nota faptul că $(x,y) \in r$ prin $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, p)$ (se citeşte " x este congruent cu y modulo p ") şi vom numi relaţia r relaţie de congruenţă modulo p pe $\mathbf{Z}$. Arătaţi că relaţia de congruenţă modulo p este o relaţie de echivalenţă şi că mulţimea- factor este

$$\mathbf{Z}/_{\equiv} = \left\{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\right\}$$

unde $[i]_p$ reprezintă clasa de echivalenţă a lui i, adică

$$[i]_p = \{p \cdot n + i \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

De obicei se notează $[i]_p = \hat{i}$. Deci $\mathbf{Z}\,/_{\equiv} = \left\{\hat{0}, \hat{1}, ..., \hat{q}\right\}$, unde am notat $q = p - 1$. Mulţimea $\mathbf{Z}\,/_{\equiv}$ se notează $\mathbf{Z}_p$ şi se numeşte mulţimea claselor de resturi modulo p.

20. În $\mathbf{R}$ definim relaţia r prin

$$x\, r\, y \;\Leftrightarrow\; y = \frac{x+1}{x-1}$$

Determinaţi domeniul de definiţie şi domeniul de valori al relaţiei r şi arătaţi că r este o relaţie de tip funcţional. Aflaţi inversa lui r.

21. În mulţimea ordonată $(\mathbf{N}, \prec)$, unde $\prec$ este relaţia definită prin

$$x \prec y \;\Leftrightarrow\; x \text{ divide pe } y$$

considerăm submulţimea $A = \{54, 60, 450\}$. Calculaţi inf A şi sup A.

22. Fie T o mulţime nevidă oarecare. Considerăm mulţimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subset)$ şi submulţi-mea $\mathcal{A} = \{X, Y\}$, unde $X, Y \in \mathcal{P}(T)$. Calculaţi $\inf \mathcal{A}$ şi $\sup \mathcal{A}$.

23. Arătaţi că $f : [0,1] \to [a,b]$ definită prin $f(t) = a + t(b-a)$, pentru orice $t \in [0,1]$, este o funcţie bijectivă şi arătaţi că inversa ei este $g : [a,b] \to [0,1]$ definită prin $g(r) = \frac{r-a}{b-a}$, pentru orice $r \in [a,b]$.

24. În cele ce urmează, vom indica o funcţie definită pe A cu valori în B prin:

$$A \to B,\ x \to f(x)$$

Considerăm următoarele funcţii:

(a) $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $x \to 2x$;

(b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

(c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

(d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$;

(e) $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$, unde $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$;

(f) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $x \to x^2$;

(g) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $x \to |x| = \begin{cases} -x & pentru\ x \leq 0 \\ x & pentru\ x > 0 \end{cases}$ (funcţia modul);

(h) $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, $x \to [x] = \sup\{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}$ (funcţia "partea întreagă");

(i) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

   i. $(x, y) \to x$,

   ii. $(x, y) \to y$,

   iii. $(x, y) \to x - y$,

   iv. $(x, y) \to x + y$,

   v. $(x, y) \to x \cdot y$,

   vi. $(x, y) \to \frac{x}{y}$, $y \neq 0$,

   vii. $(x, y) \to \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,

   viii. $(x, y) \to x^2 + y^2 - 1$;

(j) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

i. $x \to (x, x)$,

ii. $x \to (x+1, x^2-2)$;

(k) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

i. $(x, y) \to (x+y, x-y)$,

ii. $(x, y) \to (x-2, y+3)$;

(l) $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x, y, z) \to (x^3, y^3 - x, x+y+z)$;

(m) $\mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $z = x + iy \to x - y$;

(n) $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $x \to x^2 + i(x+2)$.

Cercetaţi care dintre funcţiile date sunt injective, care sunt surjective şi care sunt bijective.

25. Spunem că două mulţimi A şi B sunt echipotente, şi notăm aceasta prin $A \simeq B$, dacă există o funcţie $f : A \to B$ bijectivă. Arătaţi că au loc relaţiile de mai jos, pentru orice mulţimi A, B şi C :

(a) $A \simeq A$,

(b) $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$,

(c) $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$.

26. Arătaţi că o mulţime A este numărabilă (adică $A \simeq \mathbf{N}$) dacă şi numai dacă elementele sale se pot aranja într-un şir, adică putem prezenta mulţimea A sub forma

$$A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$$

27. Arătaţi că $\mathbf{N} \simeq \{\sqrt{2}\} \cup \mathbf{N}$.

28. Arătaţi că mulţimea numerelor pare este echipotentă cu mulţimea numerelor impare.

29. Arătaţi că $\mathbf{N} \simeq \{n \mid n \in \mathbf{N}, n \geq p\}$, oricare ar fi $p \in \mathbf{N}$.

30. Arătaţi că $\mathbf{N} \simeq \mathbf{Z}$.

31. Arătaţi că dacă $A \subset \mathbf{N}$ este o mulţime infinită atunci $A \simeq \mathbf{N}$.

32. Arătaţi că dacă A şi B sunt numărabile atunci $A \cup B$ este numărabilă.

33. Arătaţi că $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \backsimeq \mathbf{N}$.

34. Arătaţi că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

35. Arătaţi că intervalul $(0,1)$ nu este mulţime numărabilă.

36. Arătaţi că $(0,1) \backsimeq [0,1) \backsimeq (0,1] \backsimeq [0,1]$.

37. Arătaţi că $(0,1) \backsimeq (a,b)$, $[0,1) \backsimeq [a,b)$, $(0,1] \backsimeq (a,b]$, $[0,1] \backsimeq [a,b]$ oricare ar fi $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

38. Arătaţi că $(0,1) \backsimeq (a,\infty) \backsimeq (-\infty,b) \backsimeq (-\infty,\infty)$, pentru orice numere $a,b \in \mathbf{R}$.

39. Arătaţi că mulţimea $K = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbf{Q}\right\}$ este corp comutativ.

40. Arătaţi că mulţimea $\mathbf{Z}[i] = \{m + in \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$ este inel; determinaţi elementele inversabile.

Capitolul 2

Matrice, determinanţi şi sisteme liniare

2.1 Exerciţii rezolvate

Permutări

1. Considerăm permutările de gradul 4

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculaţi $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1}şi φ^2.

Rezolvare: Avem:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varphi\psi(1) & \varphi\psi(2) & \varphi\psi(3) & \varphi\psi(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog obţinem

$$\begin{aligned} \psi\varphi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \varphi\psi, \text{ iar } \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Determinaţi numărul de inversiuni ale permutării $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Numărăm perechile, de pe rândul al doilea al permutării, în care un număr mai mare se află în faţa unui număr mai mic. Numărul 3 generează două inversiuni, $(3,1)$ şi $(3,2)$. Numărul 1 nu generează inversiuni. Numărul 4 generează o inversiune, $(4,2)$. Numărul 2 nu generează inversiuni. Avem $N\varphi = 2+0+1+0 = 3$, iar $sgn.\varphi = (-1)^3 = -1$.

3. Descompuneţi permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ în produs de transpoziţii.

Rezolvare: Urmărim perechile $(i, \varphi(i))$ în care $\varphi(i) \neq i$. Prima pereche pe care o avem este $(1,2)$. Notăm

$$\varphi' = \tau_{12}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru φ' procedăm ca şi pentru φ. Acum prima pereche este $(2,3)$. Notăm

$$\varphi'' = \tau_{23}\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

Deci $e = \tau_{23}\tau_{12}\ \varphi$ din care deducem $\varphi = \tau_{12}\tau_{23}$.

Matrice

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -3i & 2-3i \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{C}]$. Calculaţi adjuncta lui A.

Rezolvare: Adjuncta lui A este matricea A^* obţinută prin transpunerea şi conjugarea elementelor lui A. Deci

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 3i \\ -2i & 2+3i \end{pmatrix}$$

2. Arătaţi că matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{C}]$ este hermitică.

Rezolvare: Matricea adjunctă a lui A este $A^* = A$, deci A este o matrice hermitică.

3. Arătaţi că matricea $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$, pentru $\alpha \in \mathbf{R}$, este ortogonală.

Rezolvare: Avem

$$A^t \cdot A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci A este o matrice ortogonală.

Determinanţi

1. Calculaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}[\mathbf{R}]$.

   Rezolvare: Matricea A are rangul $r = 2$ deoarece minorul format cu liniile 1 şi 2 şi cu coloanele 1 şi 3

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = -3$$

   este nenul şi nu există minori de ordinul 3 nenuli (de fapt matricea A nu are minori de ordinul 3).

2. Calculaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}[\mathbf{R}]$.

   Rezolvare: Matricea A are rangul $r = 2$ deoarece are cel puţin un minor de ordinul 2 nenul, şi anume

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

   iar toţi minorii de ordinul 3 sunt nuli.

3. Calculaţi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ dezvoltându-l după elementele din prima linie.

   Rezolvare: Avem

   $\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-4) -$
   $-3(4-10) + 5(2-5) = 3.$

4. Calculaţi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

dezvoltându-l după minorii formaţi pe liniile 1 şi 3, folosind regula lui Laplace.

Rezolvare: Avem

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{1\le i<j\le 4} A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ i & j \end{pmatrix} A\,\begin{matrix} 1 & 3 \\ i & j \end{matrix} = \\
&= \sum_{1\le i<j\le 4} (-1)^{1+3+i+j} A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ i & j \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ i & j \end{pmatrix} = \\
&= -A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \\
&\quad -A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \\
&\quad +A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De exemplu să calculăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

dezvoltându-l după minorii formaţi pe liniile 1 şi 3, folosind regula lui Laplace. Avem

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \\
&\quad -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \\
&\quad +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Deci $\Delta = 0 + 4\cdot 13 - 10\cdot(-2) - 6\cdot 8 + 15\cdot(-1) - 16\cdot 1 = -7$.

5. Calculaţi inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

unde $\Delta = \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$.

Rezolvare: Complemenţii algebrici ai elementelor lui A sunt: $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$ şi $A_{22} = a_{11}$. Rezultă că

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

De ezemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ avem $\Delta = \det A = -2$ şi în consecinţă

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

6. Fie A matricea de ordinul n ($n \geq 2$) cu toate elementele egale cu 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Arătaţi că $I_n - A$,unde I_n este matricea unitate de ordinul n, este inversabilă şi are inversa $I_n - \frac{1}{n-1}A$.

Rezolvare: Deducem imediat că $A^2 = nA$. Vom arăta că $I_n - A$ are inversa $I_n - \frac{1}{n-1}A$. Într-adevăr,

$$(I_n - A) \cdot \left(I_n - \frac{1}{n-1}A\right) = I_n - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}\underbrace{A^2}_{=nA} = I_n$$

şi

$$\left(I_n - \frac{1}{n-1}A\right) \cdot (I_n - A) = I_n - A - \frac{1}{n-1}A + \frac{1}{n-1}A^2 = I_n$$

din care rezultă că $I_n - A$ este inversabilă şi are inversa $I_n - \frac{1}{n-1}A$.

Sisteme liniare

1. Determinaţi soluţia sistemului liniar şi neomogen

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7 \quad ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \\ 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 19 \end{cases}$$

Rezolvare: Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 7 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -85 \neq 0$$

deci se poate aplica regula lui Cramer. Avem

$$\begin{aligned} \Delta_{x1} &= \begin{vmatrix} 15 & -3 & 5 \\ -7 & 2 & -4 \\ 19 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -85, \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 5 \\ 3 & -7 & -4 \\ 7 & 19 & 3 \end{vmatrix} = 85, \\ \Delta_{x3} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 3 & 2 & -7 \\ 7 & -6 & 19 \end{vmatrix} = -170, \\ \text{deci } x_1 &= \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = 1, x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = -1, x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta} = 2 \end{aligned}$$

Soluţia sistemului este $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$.

2. Determinaţi soluţiile sistemului

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 11x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0 \end{cases}, x_1, ..., x_4 \in \mathbf{C}$$

Rezolvare: Se verifică condiţia

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Considerăm $x_3 = 1$ şi $x_4 = 0$. Obţinem soluţia $(-2, 1, 1, 0)$. Considerăm $x_3 = 0$ şi $x_4 = 1$. Obţinem soluţia $(1, 3, 0, 1)$. Forma oricărei soluţii este

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-2, 1, 1, 0) \cdot \alpha + (1, 3, 0, 1) \cdot \beta = \\ &= (-2\alpha + \beta, \alpha + 3\beta, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

unde α şi β sunt numere complexe arbitrare.

3. Determinaţi soluţiile sistemului

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 11x_4 = 10 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 23 \end{cases}, x_1, ..., x_4 \in \mathbf{C}$$

Rezolvare: Considerăm $x_3 = x_4 = 0$ şi obţinem soluţia $(-1,4,0,0)$. Ţinând cont de exerciţiul precedent obţinem că forma oricărei soluţii este

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (-1,4,0,0)+(-2,1,1,0)\cdot\alpha+(1,3,0,1)\cdot\beta = \\ &= (-1-2\alpha+\beta, 4+\alpha+3\beta, \alpha, \beta)\end{aligned}$$

unde α şi β sunt numere complexe arbitrare.

4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ -x+4y &= 7 \\ 5x-2y &= 1 \end{cases} ;\ x,y \in \mathbf{R}$$

Rezolvare: Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Căutăm un determinant principal al sistemului. Avem succesiv:

$$\Delta_1 = 2 \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

deci Δ_2 este determinant principal. Calculăm acum determinanţii caracteristici care ar putea fi nenuli. Există un singur astfel de determinant

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Conform teoremei lui Rouché sistemul este compatibil şi determinat. Prima şi a doua ecuaţie sunt ecuaţii principale, iar x şi y sunt necunoscute principale (nu există necunoscute secundare). Sistemul dat s-a redus la sistemul principal

$$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ -x+4y &= 7 \end{cases}$$

care se rezolvă imediat cu regula lui Cramer şi se obţine soluţia $(1,2)$.

5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x+2y-z+3t &= 7 \\ -x+3y+z-5t &= 5 \\ 2x+9y-2z+4t &= 26 \end{cases} \quad ; \ x,y,z,t \in \mathbf{R}$$

Rezolvare. Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Căutăm un determinant principal. Avem

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Deducem că determinant principal este Δ_2. Determinantul caracteristic este

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 26 \end{vmatrix} = 0$$

din care deducem că sistemul este compatibil şi 1−nedeterminat. Sistemul principal este

$$\begin{cases} x+2y &= 7+z-3t \\ -x+3y &= 5-z+5t \end{cases}$$

Folosind regula lui Cramer obţinem soluţia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(11+5\alpha-19\beta) \\ y = \frac{1}{5}(12+2\beta) \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

2.2 Exerciţii propuse

1. Determinaţi numărul de inversiuni şi signatura pentru permutările următoare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

2. Calculaţi puterile l^2, l^3, l^4, l^5 şi l^6 pentru permutarea $l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. Scrieţi ca produs de transpoziţii permutarea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Determinaţi permutările $p \in S_4$ care verifică egalitatea $a \cdot p = b$, unde

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}[\mathbf{C}]$. Calculaţi: $A+B$, $A-B$ şi $5A+3B$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculaţi: $A+B$, $AB-BA$, A^2-B^2.

7. Fie $A, B \in \mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$ astfel încât $AB = BA$. Arătaţi că

$$A^m - B^m = (A-B)\cdot(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1})$$

$$(A+B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1}B + \cdots + C_m^{m-1}AB^{m-1} + B^m$$

pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$.

8. Fie $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$. Verificaţi relaţiile

$$A^m - I_n = (A - I_n)(A^{m-1} + A^{m-2} + \cdots + A + I_n)$$

$$(I_n + A)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} + \cdots + C_m^{m-1}A + I_n$$

pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$.

9. Calculaţi A^n, pentru $n \in \mathbf{N}^*$, dacă $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

10. Rezolvaţi ecuaţia
$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ X \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$$

11. Determinaţi $x, y, z, u, v, w \in \mathbf{R}$ dacă
$$3\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 5 \\ z & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 3u \\ 1 & 4v \\ 2 & 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Fie $A = diag.[a_1, ..., a_n]$ şi $B = diag.[b_1, ..., b_n] \in \mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$ două matrice diagonale de ordinul n. Arătaţi că:

    (a) $A + B = diag.[a_1 + b_1, ..., a_n + b_n]$,

    (b) $AB = diag.[a_1 b_1, ..., a_n b_n]$,

    (c) $\lambda A = diag.[\lambda a_1, ..., \lambda a_n]$,

    (d) $A^m = diag.[a_1^m, ..., a_n^m]$ pentru orice $m \in \mathbf{N}$.

13. Calculaţi $f(A)$ dacă:

    (a) $f(x) = x^2 + x + 1$, şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

    (b) $f(x) = x^2 - x + 3$, şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Fie $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$. Arătaţi că matricea $B = A + A^t$ este simetrică, iar matricea $C = A - A^t$ este antisimetrică (adică $B^t = B$ şi $C^t = -C$).

15. Fie $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$. Arătaţi că matricea $B = A + A^*$ este hermitică, iar $C = A - A^*$ este antihermitică (adică $B^* = B$ şi $C^* = -C$).

16. Calculaţi A^m, pentru $m \in \mathbf{N}$, dacă

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Calculaţi A^m, pentru $m \in \mathbf{N}$, dacă

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

18. Calculaţi AB dacă

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

19. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Calculaţi $A + B$ şi AB.

20. Calculaţi determinanţii

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

21. Calculaţi, folosind definiţia, determinantul

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

unde $a_1, ..., a_n \in \mathbf{C}$.

22. Arătaţi că

$$V[a_1, ..., a_n] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

pentru orice $a_1, ..., a_n \in \mathbf{C}$.

23. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} -1 & a & a & & a \\ a & -1 & a & & a \\ a & a & -1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ a & a & a & \cdots & -1 \end{vmatrix} = [(n-1)a - 1](-1-a)^{n-1}$$

pentru orice $a \in \mathbf{C}$.

24. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

pentru orice $a_{ij} \in \mathbf{C}$.

25. Rezolvaţi ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0; \; x \in \mathbf{C}$$

unde $a \in \mathbf{C}$ este un număr dat.

26. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3)\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$.

27. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

pentru orice $a_{ij} \in \mathbf{C}$.

28. Calculaţi rangul matricelor:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ pentru $a \in \mathbf{C}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ pentru $a \in \mathbf{C}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & c \end{pmatrix}$, unde $a_i, b_j, c \in \mathbf{C}$.

29. Verificaţi care dintre matricele de mai jos sunt inversabile şi în caz afirmativ determinaţi inversele lor:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ pentru $t \in \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$,

(b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pentru $\lambda \in \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30. Arătaţi că dacă A şi B sunt inversabile atunci sunt echivalente următoarele egalităţi:

(a) $AB = BA$,

(b) $AB^{-1} = B^{-1}A$,

(c) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$.

31. Rezolvaţi ecuaţiile matriceale:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $X \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $X \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X \in \mathbf{M}_3[\mathbf{R}]$.

32. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare:

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 = 17 \end{cases}$; $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$; $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$,

(c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = t \\ a^2x + b^2y + c^2z = t^2 \end{cases}$; $x, y, z \in \mathbf{R}$, pentru $a, b, c, t \in \mathbf{R}$ numere date, a, b şi c fiind distincte.

(d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$; $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$,

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$; $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$,

$$\text{(f)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

Capitolul 3

Spaţii vectoriale

3.1 Exerciţii rezolvate

1. Arătaţi că dacă $\mathbf{V}$ este un $\mathbf{K}$−spaţiu vectorial atunci:

   (a) există un singur vector nul în $\mathbf{V}$;

   (b) orice vector din $\mathbf{V}$ are un singur vector opus;

   (c) $\forall x, y, z \in \mathbf{V}$ avem: $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$;

   (d) $\forall x, y \in \mathbf{V}$ avem: $x = y \Leftrightarrow x - y = 0_{\mathbf{V}}$;

   (e) $\forall x, y \in \mathbf{V}$ şi $\lambda \in \mathbf{K}^*$ avem $x = y \Leftrightarrow \lambda x = \lambda y$;

   (f) $0 \cdot x = 0_{\mathbf{V}}$, $\forall x \in \mathbf{V}$;

   (g) $a \cdot 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$, $\forall a \in \mathbf{K}$;

   (h) $(-1)\, x = -x$, $\forall x \in \mathbf{V}$;

   (i) $a\,(-x) = (-a)\, x = -ax$, $\forall a \in \mathbf{K}$ şi $x \in \mathbf{V}$;

   (j) $(-a)\,(-x) = ax$, $\forall a \in \mathbf{K}$ şi $x \in \mathbf{V}$;

   (k) dacă $ax = 0_{\mathbf{V}}$, unde $a \in \mathbf{K}$ şi $x \in \mathbf{V}$, atunci $a = 0$ sau $x = 0_{\mathbf{V}}$.
   Rezolvare: a) Fie $0_{\mathbf{V}}$ şi $0'_{\mathbf{V}}$ doi vectori nuli.Avem $0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}} + 0'_{\mathbf{V}} = 0'_{\mathbf{V}}$.
   b) Fie $x, x', x'' \in \mathbf{V}$ astfel încît $x + x' = 0_{\mathbf{V}}$ şi $x + x'' = 0_{\mathbf{V}}$. Avem:

$$x' = 0_{\mathbf{V}} + x' = (x'' + x) + x' = x'' + (x + x') = x'' + 0_{\mathbf{V}} = x''$$

   c) Dacă $x = y$ atunci rezultă imediat că $x+z = y+z$. Presupun că $x+z = y+z$. Deducem de aici succesiv, z' fiind vectorul opus vectorului z

$$(x + z) + z' = (y + z) + z' \Leftrightarrow x + (z + z') = y + (z + z')$$

deci $x + 0_{\mathbf{V}} = y + 0_{\mathbf{V}}$ sau, în final, $x = y$..

d) Rezultă din c) pentru $z = -y$..

e) Dacă $x = y$ atunci rezultă imediat că $\lambda x = \lambda y$, pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}$. Să presupunem că $\lambda x = \lambda y$, pentru $\lambda \neq 0$. Avem succesiv: $x = 1 \cdot x = = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot y) = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot y = 1 \cdot y = y$.

f) Avem succesiv: $x = 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 0 \cdot x + x$. Deci avem $x = 0x + x$. De aici rezultă că $x + (-x) = (0x + x) + (-x)$, sau $0_{\mathbf{V}} = 0x + (x + (-x))$,deci $0_{\mathbf{V}} = 0x + 0_{\mathbf{V}}$ şi deci $0_{\mathbf{V}} = 0x$.

g) $a \cdot 0_{\mathbf{V}} = a \cdot (0 \cdot x) = (a \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = 0_{\mathbf{V}}$.

h) $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_{\mathbf{V}}$. Am obţinut egalitatea $(-1) \cdot x + x = 0_{\mathbf{V}}$. Adunînd opusul lui x în ambii membri obţinem $(-1) \cdot x = -x$.

i) $a \cdot (-x) = a \cdot ((-1) \cdot x) = (a \cdot (-1)) \cdot x = (-a) \cdot x = (-1)(a \cdot x) = -a \cdot x$.

j) $(-a) \cdot (-x) = (-(-a) \cdot x) = a \cdot x$, în care am ţinut cont de i).

k) Dacă $a = 0$ atunci $a \cdot x = 0 \cdot x = 0_{\mathbf{V}}$. Dacă $a \neq 0$ atunci $x = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot x = = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$; deci $x = 0_{\mathbf{V}}$.

2. Arătaţi că dacă familia de subspaţii vectoriale $\{W\alpha\}_{\alpha \in A}$ este dirijată (adică pentru orice $\alpha, \beta \in A$ există $\gamma \in A$ astfel încât $W\alpha \cup W\beta \subset W\gamma$) atunci $W = \bigcup_{\alpha \in A} W\alpha$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{V}$.

   Rezolvare: Fie $a \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in W$. Rezultă că există $\alpha_0, \beta_0 \in A$ astfel încât $x \in W_{\alpha_0}$ şi $y \in W_{\beta_0}$. Considerăm pe $\gamma_0 \in A$ astfel încât $W_{\alpha_0} \cup W_{\beta_0} \subset W_{\gamma_0}$. Deducem de aici că $x, y \in W_{\gamma_0}$. În consecinţă rezultă că ax şi $x + y$ aparţin lui W_{γ_0} şi deci lui W, ceea ce trebuia demonstrat.

3. Fie $\mathbf{U}$,$\mathbf{V}$ şi $\mathbf{W}$ trei $\mathbf{K}$ -spaţii vectoriale.Arătaţi că

   (a) Aplicaţia nulă $0 : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, definită prin $0(x) = 0_{\mathbf{V}}$ pentru orice $x \in \mathbf{U}$, este o aplicaţie liniară de la $\mathbf{U}$ la $\mathbf{V}$;

   (b) Aplicaţia identică $1_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ este aplicaţie liniară de la $\mathbf{U}$ la $\mathbf{U}$;

   (c) Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ şi definim $f' : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ prin $f'(x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{U}$, atunci $f' \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. Aplicaţia f' se notează cu $-f$ şi se numeşte aplicaţia opusă aplicaţiei f;

(d) Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ este bijectivă atunci inversa lui f este aplicaţie liniară de la $\mathbf{V}$ la $\mathbf{U}$;

(e) Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ şi $g \in \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ atunci $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{W})$.

Rezolvare:

a).Avem

$$0(ax+by) = 0_{\mathbf{V}} = a0(x) + b0(y)$$

pentru orice $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in \mathbf{U}$.

b). Avem

$$1_{\mathbf{U}}(ax+by) = ax+by = a\cdot 1_{\mathbf{U}}(x) + b\cdot 1_{\mathbf{U}}(y)$$

pentru orice $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in \mathbf{U}$.

c). Avem

$$\begin{aligned} f'(ax+by) &= -f(ax+by) = -[af(x)+bf(y)] = -af(x) - \\ -bf(y) &= a(-f(x)) + b(-f(y)) = af'(x) + bf'(y) \end{aligned}$$

pentru orice $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in \mathbf{U}$.

d). Fie $x, y \in \mathbf{V}$ şi $a, b \in \mathbf{K}$. Deoarece f este presupusă bijectivă rezultă că există $x', y' \in \mathbf{U}$ astfel încât $f(x') = x$ şi $f(y') = y$. Deducem că

$$f(ax'+by') = af(x') + bf(y') = ax+by$$

Ţinând cont de definiţia inversei unei funcţii rezultă că

$$f^{-1}(x) = x', \ f^{-1}(y) = y'$$

şi

$$f^{-1}(ax+by) = ax'+by' = af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)$$

adică $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{U})$.

e). Pentru oricare $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in \mathbf{U}$ vom avea succesiv

$$\begin{aligned} (g\circ f)(ax+by) &= g(f(ax+by)) = \\ &= g(af(x)+bf(y)) = ag(f(x)) + \\ +bg(f(y)) &= a(g\circ f)(x) + b(g\circ f)(y) \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

4. Fie $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ două $\mathbf{K}-$ spaţii vectoriale, $U_0 \subset \mathbf{U}$ şi $V_0 \subset \mathbf{V}$ subspaţii vectoriale şi $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ o aplicaţie liniară. Arătaţi că

   (a) $f(U_0)$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathbf{V}$;

   (b) $f^{-1}(V_0)$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathbf{U}$.

   Rezolvare:

   a). Fie $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in f(U_0)$ elemente arbitrare. Din definiţia lui $f(U_0)$ rezultă că există $x', y' \in U_0$ încât $x = f(x')$ şi $y = f(y')$. În aceste condiţii avem

$$ax + by = af(x') + bf(y') = f(ax' + by')$$

   Deoarece U_0 este subspaţiu vectorial rezultă că $ax' + by' \in U_0$ şi în consecinţă

$$ax + by = f(ax' + by') \in f(U_0)$$

   b). Fie $a, b \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in f^{-1}(V_0)$. Din definiţia lui $f^{-1}(V_0)$ rezultă că

$$f(x) \in V_0 \text{ şi } f(y) \in V_0$$

   Deoarece V_0 este subspaţiu vectorial rezultă că

$$af(x) + bf(y) = f(ax + by) \in V_0$$

   Folosind definiţia preimaginii rezultă că $ax + by \in f^{-1}(V_0)$, ceea ce arată în fond că $f^{-1}(V_0)$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathbf{U}$.

5. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Determinaţi nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare f.
Rezolvare: Nucleul lui f este mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)\,; \; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

Această ecuaţie se reduce la ecuaţia

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0\,; \; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

care are soluţia

$$N(f) = \{(t, 3t + s, s) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$$

Imaginea aplicaţiei f este mulţimea elementelor $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ pentru care ecuaţia

$$f(x) = y \; ; \; x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

are cel puţin o soluţie. Ecuaţia se poate scrie sub forma sistemului

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \end{cases} ; \; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

care are soluţii dacă şi numai dacă $y_1 = y_2$. Deci

$$Im(f) = \{(t,t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

6. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ un endomorfism definit prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Arătaţi că f este o proiecţie.
Rezolvare: Avem

$$f^2(x_1, x_2, x_3) = f(f(x_1, x_2, x_3)) = f(0, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, ceea ce arată că $f^2 = f$, adică f este o proiecţie.

7. Fie $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ şi $W = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbf{V}$. Determinaţi .
Rezolvare: Clasa de echivalenţă a vectorului $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ în raport cu relaţia de echivalenţă determinată de subspaţiul W este

$$[a] = \{(a_1 + x_1, a_2 + x_2) \mid 2x_1 - x_2 = 0\} = \{(y_1, y_2) \mid 2y_1 - y_2 - 2a_1 + a_2 = 0\}$$

8. În $\mathbf{R}$-spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$ considerăm baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, unde

$$\begin{cases} v_1 = (1,2,3) \\ v_2 = (0,2,3) \\ v_3 = (0,0,3) \end{cases}$$

şi vectorul $x = (2, 6, 12)$. Determinaţi matricea asociată bazei B şi matricea lui x în baza B.
Rezolvare: Matricea asociată bazei B este

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui x în baza B este

$$\frac{x}{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

deoarece $x = 2v_1 + v_2 + v_3$. Se verifică imediat relaţia

$$x = B \cdot \frac{x}{B}$$

adică relaţia

$$2v_1 + v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. În spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^3$ considerăm bazele $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ şi $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$, unde $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $v_1' = (1,2,3)$, $v_2' = (2,3,4)$ şi $v_3' = = (1,3,1)$. Determinaţi matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Rezolvare: Deoarece

$$\begin{cases} v_1' = v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ v_2' = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 \\ v_3' = v_1 + 3v_2 + v_3 \end{cases}$$

rezultă că matricea bazei B' în raport cu baza B, sau matricea de trecere de la baza B la baza B', este

$$\frac{B'}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observă că coloanele acestei matrice sunt formate din componentele vectorilor v_1', v_2' şi respectiv v_3' în raport cu baza B. Deasemenea se verifică uşor relaţia

$$B' = B \cdot \frac{B'}{B}$$

adică

$$\begin{pmatrix} v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Fie $x = (8, 7, 22) \in \mathbf{R}^3$. Avem

$$\frac{x}{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}, \frac{x}{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ iar } \frac{x}{B} = \frac{B'}{B} \cdot \frac{x}{B'}$$

adică

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

10. Considerăm transformarea liniară $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definită prin

$$\varphi(x) = (2x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2, 3x_1 - 4x_2)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Deasemenea, considerăm bazele canonice $E = \{e_1, e_2\}$ şi $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ din $\mathbf{R}^2$ şi respectiv din $\mathbf{R}^3$; deci $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ şi $f_3 = (0, 0, 1)$. Determinaţi matricea lui φ în raport cu bazele E şi F, forma analitică şi forma matriceală a lui φ.

Rezolvare: Avem

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = (2, -1, 3) = 2f_1 - f_2 + 3f_3 \\ \varphi(e_2) = (3, 1, -4) = 3f_1 + f_2 - 4f_3 \end{cases}$$

din care deducem că matricea lui φ în raport cu bazele E şi F este

$$\frac{\varphi E}{F} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Forma analitică a transformării φ este

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = -x_1 + x_2 \\ y_3 = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

care arată că punctului $x = (x_1, x_2)$ din $\mathbf{R}^2$ îi corespunde punctul $\varphi(x) = y = (y_1, y_2, y_3)$ din $\mathbf{R}^3$.

Forma matriceală a transformării φ este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

11. Considerăm transformarea liniară $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ căreia îi corespunde matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

în raport cu bazele canonice din $\mathbf{R}^2$ şi respectiv $\mathbf{R}^3$. Calculaţi φx pentru $x = $
$= (2, -3)$.

Rezolvare*:* Avem, ţinând cont de forma matriceală a lui φ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Deci $\varphi(2, -3) = (-11, -12, -13)$.

12. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = (-x_1, 3x_2)$ pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Arătaţi că subspaţiul

$$U = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$$

este invariant faţă de f.

Rezolvare*:* Într-adevăr, $f(0, x_2) = (0, 3x_2) \in U$ pentru orice $(0, x_2) \in U$, adică $f(U) \subset U$.

13. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ endomorfismul definit prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, -3x_1 - 3x_2 + 3x_3, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Arătaţi că f este nilpotent şi determinaţi o bază canonică a sa.

Rezolvare*:* Deducem imediat că matricea lui f în raport cu baza canonică

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$\frac{fB}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\left(\frac{fB}{B}\right)^2 = 0_{\mathbf{M}[\mathbf{R}^3]}$ rezultă că f^2 este endomorfismul nul, deci f este un endomorfism nilpotent de indice $p = 2$. Calculăm subspaţiile $N_i = ker.f^i$ pentru $i \in \{1, ..., p\}$, adică, în cazul nostru, calculăm pe N_1 şi pe N_2. Avem

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in N_1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

din care deducem

$$N_1 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

Pe de altă parte avem $N_2 = ker.f^2 = \mathbf{R}^3$, deoarece f^2 este endomorfismul nul. Acum calculăm subspaţiile $K_i = f^{i-1}(N_i)$ pentru $i \in \{2, ..., p\}$, adică, în cazul nostru, calculăm pe $K_2 = f(N_2) = f(\mathbf{R}^3)$. Avem

$$(y_1, y_2, y_3) \in K_2 \Leftrightarrow \exists\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ astfel încât}$$
$$\begin{cases} y_1 = & x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = & -3(x_1 + x_2 - x_3) \\ y_3 = & -2(x_1 + x_2 - x_3) \end{cases}$$

Acest sistem liniar este compatibil numai dacă $y_2 = -3y_1$ şi $y_3 = -2y_1$. Deci

$$K_2 = \{(y_1, -3y_1, -2y_1) \mid y_1 \in \mathbf{R}\}$$

Constatăm uşor că subspaţiul K_2 are dimensiunea egală cu 1 şi putem alege ca bază mulţimea formată din vectorul

$$e_1^2 = (1, -3, -2)$$

Acum completăm baza lui K_2 până la o bază a lui N_1. Deducem imediat că$\{e_1^2, e_2^1\}$,unde

$$e_2^1 = (1, 1, 2) \in N_1$$

este bază în N_1. Din faptul că $e_1^2 \in K_2 = f(N_2) = f(\mathbf{R})$ rezultă că există $e_1^1 \in N_2$ astfel încât

$$e_1^2 = f(e_1^1)$$

Putem lua, de exemplu, $e_1^1 = (1, 0, 0)$. Am obţinut astfel mulţimea de vectori

$$\begin{array}{ll} e_1^2 & e_2^1 \\ e_1^1 & \end{array}$$

Baza $E = \{e_1^2, e_1^1, e_2^1\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^3$ este o baza canonică a lui f. Avem

$$\begin{pmatrix} f(e_1^2) = & (0,0,0) & = 0 \cdot e_1^2 + 0 \cdot e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 \\ f(e_1^1) = & e_1^2 & = 1 \cdot e_1^2 + 0 \cdot e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 \\ f(e_2^1) = & (0,0,0) & = 0 \cdot e_1^2 + 0 \cdot e_1^1 + 0 \cdot e_2^1 \end{pmatrix}$$

din care rezultă că

$$\frac{fE}{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = diag.(J_2(0), 0)$$

14. Cercetaţi dependenţa liniară a vectorilor $v_1, ..., v_m \in \mathbf{R}^n$, unde $v_i = = (v_{1i}, ..., v_{ni})$ şi $m \in \mathbf{N}^*$.

Rezolvare: Cercetăm ecuaţia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0; \ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{R}$$

unde am notat cu 0 vectorul nul din $\mathbf{R}^n$. Putem scrie această ecuaţie sub forma

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_{1i}, ..., v_{ni}) = (0, ..., 0); \ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{R}$$

sau

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{1i}, ..., \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{ni}\right) = (0, ..., 0); \ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{R}$$

sau sub forma sistemului

$$\begin{cases} v_{11}\lambda_1 + \cdots + v_{1m}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}\lambda_1 + \cdots + v_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases}; \ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{R}$$

Fie $r = rang(v_{ij}) \leq \min\{m, n\}$, rangul matricei componentelor vectorilor cercetaţi şi, în acelaşi timp, rangul matricei sistemului. Se ştie că:

1) dacă $r = m$ atunci sistemul admite numai soluţia nulă

$$\lambda_1 = 0, ..., \lambda_m = 0$$

Aşadar vectorii $v_1, ..., v_m$ sunt liniar-indepenenţi;

2) dacă $r < m$ atunci sistemul admite o infinitate de soluţii, deci admite şi soluţii nenule; aşadar vectorii $v_1, ..., v_m$ sunt liniar-dependenţi.

Observăm că:

1)Dacă $m > n$, adică numărul de vectori este mai mare decît dimensiunea spaţiului $\mathbf{R}^n$, atunci avem $r \leq \min\{m, n\} < m$, ceea ce înseamnă că vectorii sunt liniar-dependenţi.

2)Dacă $m = n$, adică numărul de vectori este egal cu dimensiunea spaţiului $\mathbf{R}^n$, atunci liniar-dependenţa sau liniar-independenţa celor n vectori depinde de valoarea determinantului Δ al componentelor acelor vectori,

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

şi anume:

(a) dacă $\Delta \neq 0$ atunci vectorii sunt liniar-independenţi;

(b) dacă $\Delta = 0$ atunci vectorii sunt liniar-dependenţi.

15. Arătaţi că o mulţime $S \subset \mathbf{R}^n$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^n$dacă şi numai dacă S este mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen cu n necunoscute reale, cu coeficienţi reali. În plus, dacă r este rangul matricei sistemului atunci dimensiunea lui S este $n - r$.

Rezolvare: 1) Presupunem că $S \subset \mathbf{R}^n$ este mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} ; \ x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$ şi $j \in \{1, ..., n\}$.

Dacă $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{R}^n$ şi $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbf{R}^n$ sunt două soluţii arbitrare ale sistemului şi $\lambda \in \mathbf{R}$ este un număr oarecare, atunci din $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = 0$ şi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = 0$, pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$, deducem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j + v_j) = 0$ şi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda u_j) = 0$, pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$, adică $u + v \in S$ şi $\lambda u \in S$, ceea ce înseamnă că S este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^n$.

Să presupunem acum că $r = rang\,(a_{ij})$ şi, pentru simplificare, că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

este determinant principal al sistemului. Atunci sistemul se reduce la sistemul principal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} ; \; x_1, ..., x_r \in \mathbf{R}$$

în care necunoscutele secundare $x_{r+1}, ..., x_n$ sunt arbitrare. Luând toate necunoscutele secundare nule cu excepţia uneia, pe care o luăm egală cu 1, obţinem un set de soluţii de forma

$$\begin{cases} s_1 & = (s_{11}, ..., s_{r1}, 1, 0, ..., 0) \\ \vdots \\ s_{n-r} & = \left(s_{1(n-r)}, ..., s_{r(n-r)}, 0, ..., 0, 1\right) \end{cases}$$

unde $s_{ij} \in \mathbf{R}$ pentru orice $i \in \{1, ..., r\}$ şi $j \in \{1, ..., n-r\}$. Orice soluţie a sistemului are forma

$$s = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_{n-r} s_{n-r}$$

unde $\lambda_j \in \mathbf{R}$ pentru orice $j \in \{1, ..., n-r\}$. Se verifică imediat că vectorii $s_1, ..., s_{n-r}$ sunt liniar-independenţi, iar din relaţia anterioară rezultă că $\{s_1, ..., s_{n-r}\}$ generează subspaţiul S. Deducem astfel că mulţi-mea de vectori $\{s_1, ..., s_{n-r}\}$ este bază a subspaţiului S şi $\dim_{\mathbf{R}} S = n - r$. Mulţimea de soluţii $\{s_1, ..., s_{n-r}\}$ se mai numeşte şi *sistem fundamental* de soluţii.

2) Presupunem că S este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^n$, de dimensiune $m < n$. Alegem o bază $\{f_1, ..., f_m\}$ a lui S, unde $f_i = (a_{1i}, ..., a_{ni}) \in \mathbf{R}^n$. Pentru ca un vector $x = (x_1, ..., x_n)$ din $\mathbf{R}^n$ să aparţină subspaţiului S este necesar şi suficient să existe numerele $\xi_1, ..., \xi_m$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{m} \xi i \; f_i$. Aceasta înseamnă că apartenenţa lui x la S este echivalentă cu compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1m}\xi_m = x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + \cdots + a_{nm}\xi_m = x_n \end{cases} ; \; \xi_1, ..., \xi_m \in \mathbf{R}$$

Pe de altă parte, compatibilitatea sistemului constă în anularea tuturor determinanţilor caracteristici ai sistemului. Deoarece $\{f_1, ..., f_m\}$ este bază a lui S rezultă că $f_1, ..., f_m$ sunt liniar-independenţi, deci $rang\,(a_{ij}) = m$. Pentru simplificarea scrierii putem presupune, fără a micşora generalitatea, că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

Cu această alegere, putem spune că sistemul este compatibil dacă şi numai dacă determinanţii caracteristici

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & x_m \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & x_i \end{vmatrix}$$

pentru oricare $i \in \{m+1, ..., n\}$, sunt nuli. Observăm că determinanţii Δ_i, dezvoltaţi după ultima coloană, au expresii de forma

$$\Delta_i = \Delta_{1i} \cdot x_1 + \cdots + \Delta_{mi} \cdot x_m + \Delta \cdot x_i$$

unde $\Delta_{1i}, ..., \Delta_{mi} \in \mathbf{R}$ pentru oricare $i \in \{m+1, ..., n\}$. Cu această observaţie putem spune că $x = (x_1, ..., x_n) \in S$ dacă şi numai dacă x este soluţie a sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} \Delta_{1(m+1)} \cdot x_1 + \cdots + \Delta_{m(m+1)} \cdot x_m + \Delta \cdot x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ \Delta_{1n} \cdot x_1 + \cdots + \Delta_{mn} \cdot x_m + \Delta \cdot x_n = 0 \end{cases} ;\ x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}$$

ceea ce înseamnă că S este mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen cu n necunoscute reale şi coeficienţi reali, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

3.2 Exerciţii propuse

1. Fie $\mathbf{V} = \{v\}$ o mulţime formată dintr-un singur element. Arătaţi că $\mathbf{V}$ este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial, indiferent care este corpul $\mathbf{K}$, dacă definim adunarea în $\mathbf{V}$ prin $v + v = v$ şi înmulţirea cu scalari prin $av = v$, pentru orice $a \in \mathbf{K}$. Vom nota acest $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial prin $\{0\}$ şi îl vom numi spaţiu nul.

2. Considerăm $\mathbf{V} = \mathbf{K}$, ca adunare în $\mathbf{V}$ considerăm adunarea din corpul $\mathbf{K}$, iar ca înmulţire cu scalari considerăm înmulţirea din corpul $\mathbf{K}$. Arătaţi că $\mathbf{V} = \mathbf{K}$ este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial.

3. Arătaţi că $\mathbf{C}$ este $\mathbf{R}-$ spaţiu vectorial, luând ca adunare a vectorilor adunarea numerelor complexe, iar ca înmulţire cu scalari luând înmulţirea unui număr complex cu un număr real.

4. Arătaţi că
$$\mathbf{K}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbf{K} \text{ pentru } i = 1, ..., n\}$$
pentru orice număr $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de următoarele operaţii:

   (a) $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,

   (b) $a(x_1, ..., x_n) = (ax_1, ..., ax_n)$,
   pentru orice $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$ şi $a \in \mathbf{K}$.

5. Arătaţi că mulţimea $\mathbf{M}_{m \times n}[\mathbf{K}]$, a matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din corpul $\mathbf{K}$, este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire cu un scalar a unei matrice.

6. Arătaţi că mulţimea $\mathbf{K}[X]$, a tuturor polinoamelor cu coeficienţii în $\mathbf{K}$, este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile obişnuite de adunare a două polinoame şi de înmulţire a unui polinom cu un scalar.

7. Arătaţi că mulţimea $\mathbf{K}_n[X]$,a tuturor polinoamelor cu coeficienţii în $\mathbf{K}$, de grad cel mult n (pentru $n \in \mathbf{N}$), este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile obişnuite de adunare a două polinoame şi de înmulţire a unui polinom cu un scalar.

8. Fie T o mulţime nevidă, oarecare şi $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial.
   Demonstraţi că mulţimea
$$\mathbf{V}^T =: \{x \mid x : T \to \mathbf{V}\}$$
a tuturor funcţiilor definite pe T cu valori în $\mathbf{V}$, este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile obişnuite de adunare a două funcţii şi de înmulţire a unei funcţii cu un scalar.

9. Fie $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ două $\mathbf{K}-$ spaţii vectoriale. Arătaţi că mulţimea $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile:

   (a) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$,

(b) $a(u,v) = (au, av)$
pentru oricare $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V}$ şi $a \in \mathbf{K}$. Spaţiul vectorial $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ se numeşte *produsul direct* al spaţiilor vectoriale $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$.

10. Arătaţi că produsul direct $\mathbf{V}_1 \times \cdots \times \mathbf{V}_n$ al $\mathbf{K}$-spaţiilor vectoriale $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_n$ este $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial faţă de operaţiile:

(a) $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,

(b) $a(x_1, ..., x_n) = (ax_1, ..., ax_n)$,
pentru oricare $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathbf{V}_1 \times ... \times \mathbf{V}_n$ şi $a \in \mathbf{K}$.

11. Arătaţi că dacă $\mathbf{V}$ este $\mathbf{K}-$spaţiu vectorial atunci $\mathbf{V}$ şi $\{0_{\mathbf{V}}\}$ sunt subspaţii vectoriale.

12. Arătaţi că $\mathbf{K}_n[X]$ este subspaţiu vectorial al $\mathbf{K}-$spaţiului vectorial $\mathbf{K}[X]$.

13. Arătaţi că mulţimile

(a) $C^0[a,b] = \{f |\ f : [a,b] \to \mathbf{R},\ f - continu\breve{a}\}$,

(b) $C^k[a,b] = \left\{f |\ f : [a,b] \to \mathbf{R},\ f^{(k)} - continu\breve{a}\right\}$, pentru $k \in \mathbf{N}^*$,

(c) $C^\infty[a,b] = \{f |\ f : [a,b] \to \mathbf{R},\ f - indefinit\ derivabil\breve{a}\}$,
sunt subspaţii vectoriale ale $\mathbf{R}-$spaţiului vectorial $\mathbf{R}^{[a,b]}$. În plus

$$C^0[a,b] \supset C^1[a,b] \supset \cdots \supset C^k[a,b] \supset \cdots \supset C^\infty[a,b]$$

14. Fie $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial şi S o submulţime a lui $\mathbf{V}$. Arătaţi că intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale ale lui $\mathbf{V}$ care includ pe S este un subspaţiu vectorial. Acest subspaţiu vectorial se numeşte subspaţiu vectorial generat de S şi este notat prin $< S >$. Subspaţiul vectorial generat de mulţimea vidă este subspaţiul nul.

15. Fie $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}-$ spaţiu vectorial şi S o submulţime nevidă a sa. Arătaţi că

(a) $S \subset < S > \subset \mathbf{V}$;

(b) $< S > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in \mathbf{K},\ x_i \in S, n \in \mathbf{N}^* \right\}$

(c) $< S >$ este cel mai mic subspaţiu vectorial, în raport cu incluziunea, care conţine pe S;

16. Arătaţi că dacă $x \in \mathbf{V}$ atunci

$$< \{x\} >= \{ax \mid a \in \mathbf{K}\}$$

17. Arătaţi că dacă $S = \{x_1, ..., x_m\}$ atunci

$$< S >= \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \mid a_i \in \mathbf{K} \right\}$$

18. Arătaţi că dacă U este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{V}$ atunci

$$< U >= U$$

În particular

$$< \{0_{\mathbf{V}}\} >= \{0_{\mathbf{V}}\}, < \mathbf{V} >= \mathbf{V}\ ,\ << S > >=< S >$$

19. Arătaţi că

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow < S_1 > \subset < S_2 >$$

În particular dacă U este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{V}$ şi $S \subset U$ atunci $< S > \subset U$.

20. Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ atunci $f(0_{\mathbf{U}}) = 0_{\ \mathbf{V}}$ şi $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{U}$.

21. Fie $I \neq$ o mulţime oarecare. Considerăm produsul direct

$$\mathbf{K}^I = \{f \mid f : I \to \mathbf{K}\}$$

$i \in I$ fixat şi

$$\varphi_i : \mathbf{K}^I \to \mathbf{K},\ \ \varphi_i(f) = f(i)$$

pentru orice $f \in \mathbf{K}^I$. Arătaţi că φ_i este o funcţională liniară pentru fiecare i. Aplicaţia φ_i se numeşte proiecţie canonică.

22. Arătaţi că $Tr : \mathbf{M}_n[\mathbf{K}] \to \mathbf{K}$, definită prin

$$Tr((a_{ij})) = a_{11} + ... + a_{nn}$$

este o funcţională liniară. $Tr(A)$, pentru $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$, se numeşte urma matricei A.

23. Arătaţi că $D : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}[X]$, definită prin

$$D(f) = f', \ \forall f \in \mathbf{K}[X]$$

unde f' înseamnă derivata polinomului f, este un endomorfism.

24. Arătaţi că aplicaţia $I : C^0[a,b] \to C^0[a,b]$, unde $I(f) : [a,b] \to \mathbf{R}$ este dată prin relaţia

$$I(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall f \in C^0[a,b]$$

este un endomorfism al spaţiului $C^0[a,b]$.

25. Arătaţi că în $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{K}$ mulţimea $B = \{1\}$ este bază.

26. Arătaţi că în $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{K}^n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, o bază (numită baza canonică) este $B = \{e_1, ..., e_n\}$, în care $e_i = (\delta_{i1}, ..., \delta_{in})$ pentru $i \in N_n$, iar δ_{ij} este simbolul lui Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, şi $\delta_{ii} = 1$ pentru orice i).

27. Arătaţi că în $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{K}_n[X]$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, o bază (numită baza canonică) este mulţimea $B = \{1, X, ..., X^n\}$.

28. Arătaţi că în $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{K}[X]$ o bază (numită baza canonică) este mulţimea

$$B = \{1, X, ..., X^n, ...\}$$

29. Arătaţi că în $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{M}_{m\times n}[\mathbf{K}]$ o bază (numită baza canonică) este

$$B = \{E_{ij} \mid i \in N_m \wedge j \in N_n\}$$

unde $E_{ij} \in \mathbf{M}_{m\times n}[\mathbf{K}]$ este matricea cu toate elementele nule cu excepţia elementului din linia i, coloana j care este egal cu 1.

30. Arătaţi că:

(a) $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^n = n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$;

(b) $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n[X] = n + 1$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$;

(c) $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{M}_{m\times n}[\mathbf{K}] = m \cdot n$, pentru orice $m, n \in \mathbf{N}^*$;

(d) $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[X] = \infty$;

(e) $\dim_{\mathbf{R}} C^n[a,b] = \infty$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$;

(f) $\dim_{\mathbf{R}} C^\infty[a,b] = \infty$.

31. Arătaţi că mulţimea $S = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K}\}$, a tuturor şirurilor de numere din corpul $\mathbf{K}$ este $\mathbf{K}$-spaţiu vectorial faţă de operaţiile definite prin

 (a) $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} + (y_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi

 (b) $\lambda(x_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, pentru oricare $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in S$ şi $\lambda \in \mathbf{K}$. Cercetaţi submulţimile formate din şirurile:

  i. convergente;

  ii. fundamentale;

  iii. convergente către 0;

  iv. mărginite;

  v. convergente către 1.

32. Fie $\mathbf{V}$ un spaţiu vectorial real. Pe $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ definim operaţiile:

 (a) $(u_1,u_2)+(v_1,v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2)$, pentru orice (u_1,u_2) şi (v_1,v_2) din $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$;

 (b) $(a+ib)\cdot(u,v) = (au-bv, av+bu)$, pentru orice $a+ib \in \mathbf{C}$ şi $(u,v) \in \mathbf{V}\times\mathbf{V}$. Arătaţi că $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ este un spaţiu vectorial complex. Acest spaţiu vectorial se numeşte complexificatul lui $\mathbf{V}$ şi se notează de obicei prin ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{V}$.

33. Cercetaţi dacă sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{K}_3[X]$:

 (a) $\{p \in \mathbf{K}_3[X] \mid p(1) = 0\}$,

 (b) $\{p \in \mathbf{K}_3[X] \mid p'(1) = 0\}$,

 (c) $\{p \in \mathbf{K}_3[X] \mid p(1) = 2\}$,

 (d) $\{p \in \mathbf{K}_3[X] \mid 2p(1) + 3p(2) + 4p'(0) = 0\}$.

34. Verificaţi dacă sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{M}_{n\times m}[\mathbf{R}]$:

 (a) $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}[\mathbf{R}] \;\middle|\; a+d = b+c\right\}$,

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}] \mid b = c,\ b + d = 1 \right\}.$

35. Arătaţi că mulţimile

$$X = \left\{ (x_1, x_2, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^5 \right\} \text{ şi } Y = \left\{ (0, 0, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \right\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{R}^5$ şi că $X \oplus Y = \mathbf{R}^5$.

36. Arătaţi că mulţimile

$$X = \{ p = a + bX \mid a, b \in \mathbf{R} \} \text{ şi } Y = \left\{ p = cX^2 \mid c \in \mathbf{R} \right\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbf{R}_2[X]$ şi că $X \oplus Y = \mathbf{R}_2[X]$.

37. Fie $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}$ -spaţiu vectorial şi $x, y, z \in \mathbf{V}$, vectori liniar-independenţi. Cercetaţi, în funcţie de $\lambda \in \mathbf{R}$, dependenţa liniară a vectorilor

$$\begin{cases} v_1 = & 2x + 3y + 4z \\ v_2 = & -x + 2y + \lambda z \\ v_3 = & 3x - 2y - 5z \end{cases}$$

38. Completaţi mulţimea $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1)\} \subset \mathbf{R}^3$ până la o bază a lui $\mathbf{R}^3$.

39. Cercetaţi dacă vectorul $v \in \mathbf{V}$ este combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_2 din $\mathbf{V}$ în cazurile:

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $v = (1, 5, 9)$, $v_1 = (1, 1, 0)$ şi $v_2 = (2, -1, 3)$;

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}[X]$, $v = 1 + X + X^2$, $v_1 = 1 - X$ şi $v_2 = 1 - X + X^2$;

(c) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{2\times 3}[\mathbf{R}]$,

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

40. Cercetaţi dependenţa liniară a mulţimii de vectori A din spaţiul vectorial $\mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R})$, unde:

(a) $A = \{1, x, x^2\}$;

(b) $A = \{1, \cos 2x, \cos^2 x\}$;

(c) $A = \{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$;

(d) $A = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$.

41. Determinaţi coordonatele vectorului $v \in \mathbf{V}$ în raport cu baza B :

(a) $v = (2,3) \in \mathbf{R}^2,\ B = \{(1,5), (2,2)\}$;

(b) $v = 1 + X - 3X^2 \in \mathbf{R}_2[X],\ B = \{2, 1 + X, X + X^2\}$;

(c) $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

42. Determinaţi pe $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$< \{(1,0,3), (0,1,1)\} >=< \{(1,1,4), (1,\lambda,1)\} >$$

43. Fie $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}$ -spaţiu vectorial finit-dimensional, $S \subset \mathbf{V}$ o submulţime finită de vectori şi $v \in \mathbf{V}$. Cercetaţi liniar-dependenţa lui S, determinaţi o bază E a subspaţiului generat de S, completaţi mulţimea E până la o bază B a lui $\mathbf{V}$ şi determinaţi coordonatele vectorului v în raport cu baza B în următoarele cazuri:

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$,

$$S = \{(1,1,2), (1,1,3), (1,1,1)\}$$

$v = (0, 2, -3)$;

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[X]$,

$$S = \left\{1 + X, 2 + X, 3 + X, X^2 - 1\right\}$$

$v = (1 + X)^2$;

(c) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

44. Determinaţi o bază în subspaţiul vectorial $U \subset \mathbf{V}$ în următoarele cazuri:

(a) $U = \{p \in \mathbf{R}_3[X] \mid p(1) = 0\}, \mathbf{V} = \mathbf{R}_3[X]$;

(b) $U = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \mathbf{V} = \mathbf{R}^3$;

(c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}] \mid 3a + 2b = 0 \right\}, \mathbf{V} = \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$.

45. Calculaţi câte o bază pentru suma şi intersecţia subspaţiilor U şi W ale lui $\mathbf{R}^3$, generate de vectorii

$$u_1 = (0,4,1), u_2 = (1,0,-2), u_3 = (1,0,3)$$

şi respectiv

$$w_1 = (1,2,1), w_2 = (2,3,1), w_3 = (3,1,1)$$

46. Fie $A \subset \mathbf{M}_{2\times3}[\mathbf{R}]$,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \mid x + y = a + b,\ x, y, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

Arătaţi că A este subspaţiu şi determinaţi o bază a sa.

47. Determinaţi coordonatele vectorului $v \in \mathbf{V}$ în raport cu baza $B = = \{v_1, ..., v_n\}$ în cazurile:

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^4$, $v = (3, -5, 1, 2)$ şi

$$\begin{cases} v_1 = (0,1,1,1) \\ v_2 = (1,0,1,1) \\ v_3 = (1,1,1,0) \end{cases}$$

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[X]$, $v = 1 + 2X + 3X^2$ şi

$$\begin{cases} v_1 = 1 + X \\ v_2 = (1 + X)^2 \\ v_3 = 1 \end{cases}$$

(c) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$, $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

48. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Arătaţi că f este aplicaţie liniară,calculaţi $\ker f$ şi determinaţi o bază a sa.

49. Arătaţi că endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$, care verifică proprietatea

$$f^2 - f + 1_{\mathbf{V}} = 0$$

unde $\mathbf{V}$ este un spaţiu vectorial oarecare, este inversabil.

50. Verificaţi dacă aplicaţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3)$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, este bijectivă.

51. Considerăm aplicaţiile:

(a) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$(x_1, x_2) \to (x_1 + 2x_2, -x_1 - 3x_2, 2x_1 - x_2)$$

pentru orice (x_1, x_2) din $\mathbf{R}^2$;

(b) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$(x_1, x_2) \to (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$$

pentru orice (x_1, x_2) din $\mathbf{R}^2$;

(c) $\mathbf{M}_{2\times3}[\mathbf{R}] \to \mathbf{M}_{3\times2}[\mathbf{R}]$,

$$A \to A^t$$

pentru orice $A \in \mathbf{M}_{2\times3}[\mathbf{R}]$;

(d) $\mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$,

$$p \to p'$$

pentru orice $p \in \mathbf{R}_2[X]$;

(e) $\mathbf{M}_{2\times3}[\mathbf{R}] \to \mathbf{R}_2[X]$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \to (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) X$$

pentru orice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times3}[\mathbf{R}]$;

(f) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_1[X]$,

$$(x_1, x_2) \to x_1 + x_2 X$$

pentru orice (x_1, x_2) din $\mathbf{R}^2$;

(g) $\mathbf{M}_2[\mathbf{R}] \to \mathbf{R}^4$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

pentru orice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$;

(h) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_1[X]$,

$$(x_1, x_2) \to 2x_1 x_2 + x_2 X$$

pentru orice (x_1, x_2) din $\mathbf{R}^2$. Studiaţi liniaritatea injectivitatea şi surjectivitatea acestor aplicaţii. Pentru aplicaţiile liniare determi-naţi nucleul, imaginea, defectul şi rangul fiecăreia. Determinaţi matricea fiecărei aplicaţii liniare în raport cu bazele canonice din spaţiile care constituie domeniul de definiţie şi respectiv domeniul de valori al aplicaţiei respective.

52. Determinaţi matricea, în raport cu bazele canonice, pentru $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ în cazurile:

(a) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C}^3)$,

$$f(x) = (ix_1, ix_2, ix_3)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

(b) $f \in \mathcal{L}(M_2[\mathbf{K}])$, $f(A) = A^t$, pentru orice $A \in M_2[\mathbf{K}]$.

53. Fie

$$B = \{(1,2,3), (2,3,1), (0,0,1)\}$$

o bază în $\mathbf{R}^3$ şi endomorfismele f_i pentru care matricele în baza canonică E sunt:

$$\frac{f_1(E)}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \frac{f_2(E)}{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \frac{f_3(E)}{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinaţi matricele $\frac{f_1(B)}{B}$, $\frac{f_2(B)}{B}$ şi $\frac{f_3(B)}{B}$.

54. Arătaţi că endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, căruia îi corespunde matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$, este inversabil şi determinaţi inversul său.

55. Determinaţi compunerea aplicaţiilor liniare

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_2[X],\ f(x_1, x_2) = x_1 + x_2X + (x_1 + x_2)X^2$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, şi

$$g : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3,\ g\left(y_1 + y_2X + y_3X^2\right) = (y_1, y_2, y_3)$$

pentru orice $y_1 + y_2X + y_3X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$, folosind matricele asociate acestor aplicaţii liniare în raport cu bazele canonice.

56. Verificaţi dacă endomorfismele $f_i \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$, pentru care

$$\frac{f_1(E)}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } \frac{f_2(E)}{E} = \begin{pmatrix} 27 & 18 & 27 \\ -21 & -14 & -21 \\ -12 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

unde E este baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, sunt proiecţii.

57. Verificaţi dacă endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$, pentru care

$$\frac{f(E)}{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde E este baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, este nilpotent.

58. Determinaţi o bază canonică pentru endomorfismul nilpotent $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ a cărui matrice în raport cu baza canonică a spaţiului $\mathbf{R}^3$ este

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Capitolul 4

Spaţii euclidiene

4.1 Exerciţii rezolvate

1. Fie $\mathbf{V}$ un $\mathbf{K}$-spaţiu vectorial euclidian. Atunci au loc următoarele relaţii:

   (a) $< x, \lambda y >= \overline{\lambda} < x, y >, \forall x, y \in \mathbf{V} \wedge \lambda \in \mathbf{K}$;

   (b) $< x, y+z >=< x, y > + < x, z >, \forall x, y, z \in \mathbf{V}$;

   (c) $< x, 0_{\mathbf{V}} >=< 0_{\mathbf{V}}, x >= 0, \forall x \in \mathbf{V}$.
   Rezolvare: a) $< x, \lambda y >= \overline{< \lambda y, x >} = \overline{\lambda < y, x >} = \overline{\lambda}\overline{< y, x >} =$
   $= \overline{\lambda} < x, y >$.
   b) $< x, y+z >= \overline{< y+z, x >} = \overline{< y, x > + < z, x >} = \overline{< y, x >} + \overline{< z, x >} =$
   $=< x, y > + < x, z >$.
   c)$< x, 0_{\mathbf{V}} >=< x, 0 \cdot x >= 0 \cdot < x, x >= 0$ şi analog $< 0_{\mathbf{V}}, x >=< 0 \cdot x, x >=$
   $= 0 \cdot < x, x >= 0$.

2. Expresia
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$
pentru orice $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$ şi $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$, defineşte un produs scalar în $\mathbf{K}$-spaţiul vectorial $\mathbf{K}^n$ pe care îl vom numi produsul scalar uzual.
Rezolvare: Fie $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$ trei vectori arbitrari din $\mathbf{K}^n$ şi λ un număr oarecare. Avem:
a)
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i \right)} = \overline{< y, x >}$$

b)

$$< x+z, y >= \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i)\,\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} + \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{y_i} =< x, y > + < z, y >$$

c)

$$< \lambda x, y >= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i\overline{y_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \lambda < x, y >$$

d)

$$< x, x >= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$$

dacă x este diferit de vectorul nul. Am verificat astfel toate axiomele produsului scalar.

3. Calculaţi produsul scalar al vectorilor $a = (2, 1+i, -3i)$ şi $b = (-5i, 2, 0)$ din spaţiul euclidian $\mathbf{C}^3$, folosind produsul scalar uzual.
   Rezolvare: Avem
   $$< a, b >= 2 \cdot \overline{(-5i)} + (1+i) \cdot \overline{2} + (-3i) \cdot 0 = 2 + 12i$$

4. Calculaţi norma euclidiană (generată de produsul scalar uzual) din $\mathbf{C}^3$ pentru vectorul $a = (2, 1+i, -3i)$ din $\mathbf{C}^3$.
   Rezolvare: Avem
   $$\|a\| = \sqrt{|2|^2 + |1+i|^2 + |-3i|^2} = \sqrt{4+2+9} = \sqrt{15}$$

5. Calculaţi distanţa euclidiană (generată de norma euclidiană) dintre punctele $x = (1, 2, 3, 4)$ şi $y = (2, 1, 0, 7)$ din $\mathbf{R}^4$.
   Rezolvare: Avem
   $$d(x, y) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-0)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{20}$$

6. Arătaţi că vectorii $x = (1, 2, 3)$ şi $y = (2, 5, -4)$ din $\mathbf{R}^3$ sunt ortogonali faţă de produsul scalar uzual.
   Rezolvare: Avem
   $$< x, y >= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = 2 + 10 - 12 = 0$$

7. Arătaţi că mulţimile de vectori

$$A = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbf{R}\} \text{ şi } B = \{(2s + 3p, -s, -p) \mid s, p \in \mathbf{R}\}$$

din $\mathbf{R}^3$sunt ortogonale în raport cu produsul scalar uzual.

Rezolvare: Într-adevăr, pentru orice $x = (t, 2t, 3t)$ din A şi $y = (2s + 3p, -s, -p)$ din B avem

$$< x, y > = t\,(2s + 3p) - 2ts - 3tp = 0$$

8. Calculaţi lungimea şi versorul vectorului $x = (1, 1, 2)$ din $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual.

Rezolvare: Lungimea lui x este

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

iar versorul lui x este vectorul

$$u = \frac{1}{\|x\|} x = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, 1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

9. În $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual, calculaţi proiecţia vectorului $x = (1, 1, 2)$ pe vectorul $y = (2, 3, 2)$.

Rezolvare: Proiecţia lui x pe y este

$$pr._y x = \frac{< x, y >}{< y, y >} \cdot y = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2^2 + 3^2 + 2^2}\,(2, 3, 2) = \frac{9}{17}\,(2, 3, 2) = \left(\frac{18}{17}, \frac{27}{17}, \frac{18}{17}\right)$$

10. În $\mathbf{R}^3$, înzestrat cu produsul scalar uzual, calculaţi unghiul θ dintre vectorii $x =$ $= (1, 2, 3)$ şi $y = (4, 5, 6)$.

Rezolvare: Unghiul θ dintre vectorii x şi y este dat de relaţia

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}} = \frac{32}{\sqrt{14 \cdot 77}} = \frac{16\sqrt{22}}{77}$$

11. Ortogonalizaţi mulţimea formată din vectorii $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ şi $v_3 =$ $= (1, 1, 2)$ din $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual.

Rezolvare: Notăm $w_1 = v_1$. Calculăm

$$w_2 = v_2 - pr._{w_1} v_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = \frac{1}{3}\,(-1, 2, -1)$$

şi apoi

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - pr._{w_1}v_3 - pr._{w_2}v_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >}w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >}w_2 = \\ &= \frac{1}{2}(-1,0,1) \end{aligned}$$

Am obţinut mulţimea ortogonală $\{w_1, w_2, w_3\}$, unde

$$\begin{cases} w_1 = & (1,1,1) \\ w_2 = & (-1/3, 2/3, -1/3) \\ w_3 = & (-1/2, 0, 1/2) \end{cases}$$

Deoarece matricea componentelor setului de vectori $\{v_1, v_2, v_3\}$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi $\det A = 1 \neq 0$ rezultă că $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$. În consecinţă $F = \{w_1, w_2, w_3\}$ va fi o bază ortogonală a lui $\mathbf{R}^3$. Vom "norma" vectorii w_i, adică vom calcula versorii $u_i = \frac{1}{\|w_i\|}w_i$. Avem

$$\begin{aligned} \|w_1\| &= \sqrt{3}, \|w_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \|w_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ şi } u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1), u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \end{aligned}$$

şi am obţinut baza ortonormată $G = \{u_1, u_2, u_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$.

12. Determinaţi forma generală a unei aplicaţii liniare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$, spaţiul euclidian $\mathbf{K}^n$ fiind înzestrat cu produsul scalar uzual.

Rezolvare: Conform teoremei lui Riesz, lui f îi corespunde un element, unic determinat, $y = (y_1, ..., y_n)$ din $\mathbf{K}^n$ astfel încât

$$f(x) = < x, y > = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

Notăm $l_i = \overline{y_i}$, pentru fiecare i, şi obţinem

$$f(x) = x_1 l_1 + ... + x_n l_n$$

pentru orice $x = (x_1, ..., x_n)$ din $\mathbf{K}^n$, $l_1, ..., l_n$ fiind elemente din $\mathbf{K}$ fixate, depinzând de f.

13. În $\mathbf{C}^2$ considerăm produsul scalar uzual. Verificaţi că endomorfismul $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$ definit prin

$$\varphi(z_1, z_2) = (z_1 + (1-i) z_2, (1+i) z_1 - 3z_2)$$

pentru orice $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ este hermitian.

Rezolvare: Într-adevăr, notînd $z = (z_1, z_2)$, avem

$$\begin{aligned} < \varphi z, z > &= [z_1 + (1-i) z_2] \cdot \overline{z_1} + [(1+i) z_1 - 3z_2] \cdot \overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + (1-i) z_2 \cdot \overline{z_1} + (1+i) z_1 \cdot \overline{z_2} - 3|z_2|^2 \end{aligned}$$

Avem $m = |z_1|^2 \in \mathbf{R}$ şi $n = |z_2|^2 \in \mathbf{R}$ evident. Numărul $p = (1-i) z_2 \cdot \overline{z_1} + (1+i) z_1 \cdot \overline{z_2}$ are proprietatea că $\overline{p} = (1+i) \overline{z_2} \cdot z_1 + (1-i) \overline{z_1} \cdot z_2 = p$, deci $p \in \mathbf{R}$. Aşadar $< \varphi z, z >= m + p - 3n \in \mathbf{R}$ şi deci φ este hermitian.

14. Fie $\mathbf{V}$ un spaţiu euclidian real. Arătaţi că transformările ortogonale ale lui $\mathbf{V}$ sunt izometrii.

Rezolvare: Într-adevăr, dacă $r \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ este o transformare ortogonală atunci $\|rv\| = = \|v\|$ pentru orice $v \in \mathbf{V}$ şi în consecinţă

$$d(rx, ry) = \|rx - ry\| = \|r(x-y)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{V}$.

4.2 Exerciţii propuse

1. Arătaţi că funcţia $< . > : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{K}$ defineşte un produs scalar pe $\mathbf{K}$ -spaţiul vectorial $\mathbf{V}$:

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[X], \mathbf{K} = \mathbf{R}$,

$$< p, q >= p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{4.1}$$

pentru orice $p = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$ şi $q = q_0 + q_1 X + q_2 X^2$ din $\mathbf{R}_2[X]$;

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[X], \mathbf{K} = \mathbf{R}$,

$$< p, q >= p(0) q(0) + p(1) q(1) + p(2) q(2) \tag{4.2}$$

pentru orice p şi q din $\mathbf{R}_2[X]$;

(c) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[X], \mathbf{K} = \mathbf{R}$,

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt \tag{4.3}$$

pentru orice p şi q din $\mathbf{R}_2[X]$;

(d) $\mathbf{V} = \mathbf{C}^2, \mathbf{K} = \mathbf{C}$,

$$< z, w >= z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 \tag{4.4}$$

pentru orice $z = (z_1, z_2)$ şi $w = (w_1, w_2)$ din $\mathbf{C}^2$;

(e) $\mathbf{V} = \mathbf{C}^2, \mathbf{K} = \mathbf{C}$,

$$< z, w >= 2z_1\overline{w}_1 - iz_1\overline{w}_2 + iz_2\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 \tag{4.5}$$

pentru orice $z = (z_1, z_2)$ şi $w = (w_1, w_2)$ din $\mathbf{C}^2$;

(f) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{m\times n}[\mathbf{R}], \mathbf{K} = \mathbf{R}$,

$$< A, B >= Tr.\left(A^t B\right) \tag{4.6}$$

pentru orice A şi B din $\mathbf{M}_{m\times n}[\mathbf{R}]$;

(g) $\mathbf{V} = \mathbf{C}^0[0,1], \mathbf{K} = \mathbf{R}$,

$$< x, y >= \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt \tag{4.7}$$

pentru orice x şi y din $\mathbf{C}^0[0,1]$.

2. Calculaţi unghiul dintre polinoamele $p = 1 + X + X^2$ şi $q = 1+ +X^2$ din $\mathbf{R}_2[X]$ înzestrat cu produsele scalare: 4.1,4.2 şi respectiv 4.3 . Corespunzător fiecărui produs scalar calculaţi proiecţia lui p pe q.

3. Determinaţi o bază ortonormată a spaţiului $\mathbf{R}_2[X]$, înzestrat cu produsele scalare 4.1,4.2 şi respectiv 4.3, aplicând procedeul Gram-Schmidt bazei $\{1, 1+X, 1+X+X^2\}$.

4. Determinaţi o bază ortonormată a subspaţiului generat de vectorii $(1,1,1,0)$, $(0,1,2,3)$ şi $(0,0,2,3)$ din $\mathbf{R}^4$ înzestrat cu produsul scalar uzual.

5. Determinaţi pe $M^\perp$ în $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual, pentru

$$M =< (1,0,1), (-1,2,1), (1,2,3) >$$

şi scrieţi descompunerea lui $x = (2,8,8)$ în suma a două elemente din M şi respectiv $M^\perp$.

6. În $\mathbf{C}^0[0,1]$ înzestrat cu produsul scalar 4.7, ortogonalizaţi mulţimea de funcţii $\{1,t,t^2,t^3\}$.

7. Determinaţi adjuncta transformării liniare $f \in \mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$, unde $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ sunt $\mathbf{K}$ -spaţii vectoriale euclidiene:

   (a) $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{R}^2, \mathbf{K}=\mathbf{R}$, $f(x_1,x_2) = (2x_1+3x_2, 4x_2)$ pentru orice (x_1,x_2) din $\mathbf{R}^2$ înzestrat cu produsul scalar uzual;

   (b) $\mathbf{U}=\mathbf{R}^2, \mathbf{V}=\mathbf{R}^3, \mathbf{K}=\mathbf{R}$, $f(x_1,x_2) = (2x_1+3x_2, 4x_2, x_1-x_2)$ pentru orice (x_1,x_2) din $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ şi $\mathbf{R}^3$ fiind înzestrate cu produsul scalar uzual;

   (c) $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{C}^2, \mathbf{K}=\mathbf{C}$, f are matricea $\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{C}^2$ înzestrat cu produsul scalar uzual;

   (d) $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{R}_2[X], \mathbf{K}=\mathbf{R}$, $f(p) = p' + 2p$ pentru orice p din $\mathbf{R}_2[X]$ înzestrat cu produsele scalare 4.1,4.2 şi respectiv 4.3.

8. Arătaţi că endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ este hermitian, ştiind că matricea lui f în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, înzestrat cu produsul scalar uzual, este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

9. În $\mathbf{R}^3$ considerăm produsul scalar uzual. Arătaţi că endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$, definit prin
$$f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}, x_2, \frac{x_1-x_3}{\sqrt{2}}\right)$$
pentru orice (x_1,x_2,x_3) $\mathbf{R}^3$, este unitar.

10. În $\mathbf{R}^2$ considerăm produsul scalar uzual. Arătaţi că endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, care are matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ în raport cu baza $E = = \{(1,0),(1,1)\}$, este hermitian.

11. Calculaţi adjunctele endomorfismelor $f,g,h \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$ definite prin
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x_1, x_2, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \\ g(x) &= (ix_1+x_2+x_3, x_1+ix_2+x_3, x_1+x_2+ix_3) \\ h(x) &= (x_1+ix_2, x_2+ix_3, x_3+ix_1) \end{aligned}$$
pentru orice $x=(x_1,x_2,x_3)$ din $\mathbf{C}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual.

12. Arătaţi că funcţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin

$$f(x) = (-x_2 + 1, x_1 + 2, -x_3 + 3)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)$ din $\mathbf{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar uzual, este o izometrie. Descompuneţi această izometrie în produsul dintre o translaţie şi o transformare ortogonală.

Capitolul 5

Valori şi vectori proprii

5.1 Exerciţii propuse

1. Verificaţi că $\lambda = 3$ este valoare proprie, iar $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ este vector propriu al matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Rezolvare: Într-adevăr,

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X$$

2. Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$$

   Rezolvare: Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

   Ecuaţia caracteristică a matricei A este

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \; ; \; \lambda \in \mathbf{R}$$

   Rezolvând ecuaţia caracteristică obţinem soluţiile: $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 7$, deci spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{-2, 7\}$.Pentru a găsi vectorii proprii ai matricei A corespunzători valorii proprii $\lambda = -2$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$(A + 2I)X = O \; ; \; X \in \mathbf{M}_{2\times 1}[\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau, scalar,

$$5x_1+4x_2=0\ ;\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$$

Rezolvând obţinem: $x_1 = 4t$, $x_2 = -5t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; deci mulţimea vectorilor proprii care corespund valorii proprii $\lambda = -2$ este

$$\left\{X=\begin{pmatrix} 4t \\ -5t \end{pmatrix}\mid t\in\mathbf{R}^*\right\}$$

Vectorii proprii ai matricei A corespunzători valorii proprii $\lambda = 7$ se obţin rezolvând sistemul

$$(A-7I)X=O\ ;\ X\in\mathbf{M}_{2\times 1}[\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau, scalar,

$$x_1-x_2=0\ ;\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$$

Soluţia sistemului este: $x_1 = x_2 = t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; deci mulţimea vectorilor proprii care corespund valorii proprii $\lambda = 7$ este

$$\left\{X=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\mid t\in\mathbf{R}^*\right\}$$

3. Fie

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2[\mathbf{K}].$$

Determinaţi polinomul caracteristic al matricei A, calculaţi A^{-1} şi A^2 folosind consecinţe din teorema Hamilton-Cayley.

Rezolvare: Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=p_0+p_1\lambda+\lambda^2$$

unde $p_0 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $p_1 = -(a_{11} + a_{22})$. Conform Teoremei Hamilton-Cayley rezultă că

$$A^2+p_1A+p_0I=0$$

din care deducem

$$A^2 = -p_1 A - p_0 I \quad , \; A\left(A + p_1 I\right) = -p_0 I$$

deci

$$A^{-1} = -\frac{1}{p_0} A - \frac{p_1}{p_0} I$$

Apoi

$$A^3 = -p_1 A^2 - p_0 A = \left(p_1^2 - p_0\right) A + p_1 p_0 I$$

4. Determinaţi polinomul caracteristic, spectrul şi subspaţiile proprii ale endomorfismului $f \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^2\right)$ definit prin

$$f\left(x_1, x_2\right) = \left(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\right)$$

pentru orice $\left(x_1, x_2\right) \in \mathbf{R}^2$.
Rezolvare: În raport cu baza canonică E a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^2$, matricea lui f este

$$A = \frac{fE}{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic al endomorfismului f este tocmai polinomul caracteristic al matricei A, adică

$$P_f\left(\lambda\right) = \det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Rezolvând ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \; ; \; \lambda \in \mathbf{R}$$

obţinem valorile proprii ale lui f (şi ale lui A): $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 3$. Spectrul lui f este spectrul lui A, deci $\sigma_f = \{1, 3\}$. Pentru a determina subspaţiul propriu $V_{\lambda_1}(f)$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$\left(A - I\right) X = O \; ; \; X \in \mathbf{M}_2\left[\mathbf{R}\right]$$

adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2\left[\mathbf{R}\right]$$

sau $x_1 + x_2 = 0$; $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Obţinem, evident, $x_1 = t$ şi $x_2 = -t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Deci

$$V_{\lambda_1}(f) = \{(t, -t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

Pentru a determina subspaţiul propriu $V_{\lambda_2}(f)$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$(A - 3I)X = O \; ; \; X \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2[\mathbf{R}]$$

sau $x_1 - x_2 = 0$; $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Obţinem, evident, $x_1 = t$ şi $x_2 = t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Deci

$$V_{\lambda_2}(f) = \{(t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

5. Cercetaţi dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

se poate diagonaliza şi, în caz afirmativ, diagonalizaţi-o şi calculaţi e^{xA}.

Rezolvare: Considerăm endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ căruia, în baza canonică, îi corespunde matricea A. Avem

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Ecuaţia caracteristică

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \; ; \; \lambda \in \mathbf{R}$$

are soluţiile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = -1$. Deci valorile proprii ale matricei A (şi ale endomorfismului f) sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = -1$. Deoarece toate valorile proprii au multiplicitatea egală cu 1 rezultă că toate valorile proprii au dimensiunea geometrică egală cu dimensiunea algebrică, deci endomorfismul f este diagonalizabil. Determinăm subspaţiile proprii ale lui f.

Pentru $\lambda = 1$ rezolvăm sistemul

$$(A - I)X = O \; ; \; X \in \mathbf{M}_{3\times1}[\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

sau

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = 0 \end{cases} ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

Obţinem soluţia $x_1 = t, x_2 = 0$ şi $x_3 = -t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, deci

$$V_{\lambda_1} = \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

O bază pentru V_{λ_1} este, evident, $E_1 = \{(1, 0, -1)\}$.

Pentru $\lambda = 2$ rezolvăm sistemul

$$(A - 2I)\, X = O\ ;\ X \in \mathbf{M}_{3\times 1}\, [\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

sau

$$\begin{cases} -x_1 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

Obţinem soluţia $x_1 = 0, x_2 = 3t$ şi $x_3 = -2t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, deci

$$V_{\lambda_2} = \{(0, 3t, -2t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

O bază pentru V_{λ_2} este, evident, $E_2 = \{(0, 3, -2)\}$.

Pentru $\lambda = -1$ rezolvăm sistemul

$$(A + I)\, X = O\ ;\ X \in \mathbf{M}_{3\times 1}\, [\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

sau

$$\begin{cases} 2x_1 & = 0 \\ 3x_2 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 & = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

Obţinem soluţia $x_1 = x_2 = 0$ şi $x_3 = t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, deci

$$V_{\lambda_3} = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

O bază pentru V_{λ_3} este, evident, $E_3 = \{(0,0,1)\}$.

Considerăm baza $E' = \{(1,0,-1),(0,3,-2),(0,0,1)\}$ obţinută prin reunirea bazelor E_1, E_2 şi E_3. Matricea de trecere de la baza canonică E a lui $\mathbf{R}^3$ la baza E' este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea lui f în baza E' este $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se poate verifica uşor relaţia $A' = C^{-1}AC$. În final deducem şi că

$$e^{xA} = C \cdot \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x\lambda_3} \end{pmatrix} \cdot C^{-1} = C \cdot \begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot C^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{2x} & 0 \\ -3e^{x} + 3e^{-x} & 2e^{-x} - 2e^{2x} & 3e^{-x} \end{pmatrix}$$

6. Cercetaţi dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

se poate diagonaliza şi, în caz afirmativ, diagonalizaţi-o şi calculaţi A^p, pentru orice $p \in \mathbf{N}$.

Rezolvare: Considerăm endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ căruia, în baza canonică, îi corespunde matricea A. Avem

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)$$

Rezolvând ecuaţia caracteristică

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)=0\ ;\ \lambda\in\mathbf{R},$$

obţinem valorile proprii $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Deoarece $\lambda_1=-2$ este rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice rezultă că dimensiunea geometrică a lui λ_1 coincide cu dimensiunea sa algebrică. Deoarece dimensiunea algebrică a valorii proprii $\lambda_2=\lambda_3=1$ este 2 rămâne să cercetăm dimensiunea geometrică a acestei valori proprii.Avem

$$A-I=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}$$

din care deducem uşor că $rang.A=1$ şi deci multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda=1$ este egală cu 2. Aşadar matricea A este diagonalizabilă (respectiv f este diagonalizabil). În continuare determinăm subspaţiile proprii.
Pentru $\lambda=-2$ rezolvăm sistemul

$$(A+2I)\,X=O\ ;\ X\in\mathbf{M}_{3\times1}\left[\mathbf{R}\right]$$

adică

$$\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ ;x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$$

sau

$$\begin{cases}6x_1\ +6x_2 = 0\\-3x_1\ -3x_2 = 0\\-3x_1\ -6x_2\ +3x_3 = 0\end{cases}\ ;\ x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$$

Obţinem soluţia: $x_1=t,x_2=x_3=-t$, pentru orice $t\in\mathbf{R}$. Deci

$$V_{\lambda_1}(f)=\{(t,-t,-t)\ \mid t\in\mathbf{R}\}$$

din care deducem uşor că $E_1=\{(1,-1,-1)\}$ este o bază a lui $V_{\lambda_1}(f)$.
Pentru $\lambda_2=\lambda_3=1$ avem de rezolvat sistemul

$$(A-I)\,X=O\ ;\ X\in\mathbf{M}_{3\times1}\left[\mathbf{R}\right]$$

adică

$$\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ ;x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$$

sau

$$3x_1 + 6x_2 = 0 \ ; \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

din care obţinem soluţia: $x_1 = 2t, x_2 = -t$ şi $x_3 = s$, pentru orice t şi s din $\mathbf{R}$. Deci

$$V_{\lambda_2}(f) = \{(2t, -t, s) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$$

din care deducem că

$$E_2 = \{(2, -1, 0), (0, 0, 1)\}$$

este o bază a lui $V_{\lambda_2}(f)$. Baza faţă de care matricea lui f are formă diagonală este $E' = \{(1, -1, -1), (2, -1, 0), (0, 0, 1)\}$, obţinută prin reunirea lui E_1 cu E_2. Matricea lui f în raport cu această bază este $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza canonică E a lui $\mathbf{R}^3$ la baza E' este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se poate verifica uşor relaţia $A' = C^{-1}AC$, adică relaţia de diagonalizare a matricei A. În final avem $A^p = C(A')^p C^{-1}$ adică

$$A^p = C \begin{pmatrix} (-2)^p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} (-2)^p + 2 & (-2)^{p+1} & 0 \\ (-2)^p - 1 & -(-2)^{p+1} - 1 & 0 \\ (-2)^p - 1 & -(-2)^{p+1} - 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Cercetaţi dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

este jordanizabilă şi în caz afirmativ jordanizaţi-o.

Rezolvare: Pentru aceasta vom cerceta endomorfismul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ căruia îi corespunde matricea A în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$. Polinomul caracteristic al lui f, şi deci al lui A, este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 10 \\ -4 & 3-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

Ecuaţia caracteristică

$$-(\lambda-2)^3=0\ ;\ \lambda\in\mathbf{R}$$

are o singură soluţie şi anume: $\lambda_1=2$, multiplă de ordinul $m_1=3$.

Cercetăm rangul matricei

$$A-2I=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Obţinem evident $rang.(A-2I)=2$. Deoarece

$$n-rang.(A-2I)=3-2=1\neq m_1=3$$

rezultă că matricea nu este diagonalizabilă.

Avem de determinat subspaţiul

$$V_1=\ker(f-2\cdot 1_V)^3$$

Matricea care corespunde lui $(f-2\cdot 1_V)^3$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$(A-2I)^3=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

din care deducem că $g=f-2\cdot 1_V$ este endomorfism nilpotent de indice 3 şi $V_1=\mathbf{R}^3$. În continuare căutăm o bază canonică pentru endomorfismul nilpotent g. Deoarece indicele lui g este 3, este suficient să determinăm un vector $x_0\in\mathbf{R}^3$ astfel încât $g^2(x_0)\neq 0_{\mathbf{R}^3}$. Este uşor de văzut că $x_0=(1,0,0)$ îndeplineşte condiţia cerută. Într-adevăr, din

$$(A-2I)^2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

rezultă că $g^2(x_0)=(-2,-1,-1)$. În aceste condiţii deducem că o bază canonică pentru g este $E'=(v_1,v_2,v_3)$, unde

$$\begin{cases} v_1= & g^2(x_0)= & (-2,-1,-1)\\ v_2= & g(x_0)= & (-6,-4,-3)\\ v_3= & x_0= & (1,0,0)\end{cases}$$

Matricea lui g în această bază este

$$G=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

deoarece

$$\begin{cases}g(v_1)= & g^3(x_0)= & 0_{\mathbf{R}^3}=0\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3\\ g(v_2)= & g^2(x_0)= & v_1=1\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3\\ g(v_3)= & g(x_0)= & v_2=0\cdot v_1+1\cdot v_2+0\cdot v_3\end{cases}$$

Matricea lui f în baza E' este

$$A'=G+2I=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=J_3(2)$$

şi are formă jordaniană. Matricea de trecere de la baza canonică E a lui $\mathbf{R}^3$ la baza E' este

$$C=\begin{pmatrix}-2&-6&1\\-1&-4&0\\-1&-3&0\end{pmatrix}$$

Se poate verifica uşor că $A'=C^{-1}AC$, adică

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-4\\0&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-6&1\\-1&-4&0\\-1&-3&0\end{pmatrix}$$

8. Cercetaţi dacă endomorfismul $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ definit prin

$$f(x)=(3x_1+x_2,-4x_1-x_2,7x_1+x_2+2x_3+x_4,-17x_1-6x_2-x_3)$$

pentru orice $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4$ este jordanizabil şi în caz afirmativ determinaţi o bază în raport cu care matricea lui f să aibă formă jordananiană.

Rezolvare: Faţă de baza canonică E a lui $\mathbf{R}^4$ matricea lui f este

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-17&-6&-1&0\end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4$$

Ecuaţia caracteristică

$$(\lambda-1)^4 = 0\ ;\ \lambda \in \mathbf{R},$$

are o singură soluţie: $\lambda_1 = 1$ multiplă de ordinul $m_1 = 4$. Calculăm rangul matricei

$$A - I = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

şi obţinem: $rang.(A-I) = 2 < 4 = m_1$, din care rezultă că f nu este diagonalizabil. Deoarece toate valorile proprii sunt în $\mathbf{R}$ şi suma multiplicităţilor lor este egală cu dimensiunea lui $\mathbf{R}^4$ rezultă că f este jordanizabil.
Trebuie să calculăm subspaţiul

$$V_1 = \ker\left(f - 1_{\mathbf{R}^4}\right)^4$$

Deoarece$(A-I)^2$ este matricea nulă rezultă că $g = f - 1_{\mathbf{R}^4}$ este un endomorfism nilpotent de indice $p = 2$. Vom determina baza canonică pentru acest endomorfism nilpotent. Pentru început trebuie să calculăm subspaţiile

$$N_i = \ker g^i \text{ pentru } i \in \{1,2\} \text{ şi } K_2 = g(N_2)$$

Pentru a calcula pe $N_1 = \ker g$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}[\mathbf{R}]$$

În urma rezolvării se obţine soluţia $(a, -2a, b, -5a-b)$, pentru orice a şi b din $\mathbf{R}$, deci

$$N_1 = \{(a, -2a, b, -5a-b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Pentru a calcula pe $N_2 = \ker g^2$ ţinem cont că g^2 este endomorfismul nul, deci $N_2 = \mathbf{R}^4$. În continuare rezultă $\ker g^3 = \ker\, g^4 = \mathbf{R}^4 = V_1$.

Pentru a calcula pe K_2 ţinem cont că

$$K_2 = \left\{y \in \mathbf{R}^4 \mid \exists\, x \in \mathbf{R}^4 \;\therefore\; y = g\left(x\right)\right\}$$

Aceasta înseamnă că subspaţiul K_2 este format din toate elementele (y_1, y_2, y_3, y_4) din $\mathbf{R}^4$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & & = y_1 \\ -4x_1 & -2x_2 & & & = y_2 \\ 7x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = y_3 \\ -17x_1 & -6x_2 & -x_3 & -x_4 & = y_4 \end{cases} ;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$$

este compatibil. Deducem uşor că sistemul este compatibil numai dacă $y_2 = -2y_1$ şi $5y_1 + y_3 + y_4 = 0$, din care deducem că

$$K_2 = \{(a, -2a, b, -5a - b) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = N_1$$

Căutăm o bază a lui K_2. Luând mai întâi $a = 1$ şi $b = 0$,iar apoi $a = 0$ şi $b = 1$ obţinem baza

$$E^2 = \left\{e_1^2, e_2^2\right\}$$

cu $e_1^2 = (1, -2, 0, -5)$ şi $e_2^2 = (0, 0, 1, -1)$. Acum, conform teoriei, ar trebui să completăm această bază până la o bază a lui N_1, dar $N_1 = K_2$ şi deci operaţia se poate considera făcută. În continuare căutăm $e_1^1 \in N_2$ şi $e_2^1 \in N_2$ astfel încât să avem

$$g\left(e_1^1\right) = e_1^2 \text{ şi } g\left(e_2^1\right) = e_2^2$$

Pentru aceasta trebuie să considerăm sistemele:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & & = 1 \\ -4x_1 & -2x_2 & & & = -2 \\ 7x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ -17x_1 & -6x_2 & -x_3 & -x_4 & = 5 \end{cases} ;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$$

pentru care o soluţie este $(0, 1, -1, 0)$, şi

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & & = 0 \\ -4x_1 & -2x_2 & & & = 0 \\ 7x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ -17x_1 & -6x_2 & -x_3 & -x_4 & = -1 \end{cases} ;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$$

pentru care o soluţie este $(1,-2,0,-5)$. Deci putem lua

$$e_1^1=(0,1,-1,0) \text{ şi } e_2^1=(1,-2,0,-5)$$

Am obţinut tabloul de vectori

$$\begin{array}{cc} e_1^2 & e_2^2 \\ e_1^1 & e_2^1 \end{array}$$

Baza canonică a lui g este

$$E'=\left\{e_1^2,e_1^1,e_2^2,e_2^1\right\}$$

Deoarece

$$\begin{cases} g\left(e_1^2\right)= & g^2\left(e_1^1\right)=0 \\ g\left(e_1^1\right)= & e_1^2 \\ g\left(e_2^2\right)= & g^2\left(e_2^1\right)=0 \\ g\left(e_2^1\right)= & e_2^2 \end{cases}$$

rezultă că matricea lui g în baza E' este

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea lui f în raport cu baza E' va fi (deoarece $f=g+1_{\mathbf{R}^4}$)

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea de trecere de la baza E a lui $\mathbf{R}^4$ la baza E' este

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Se poate verifica printr-un calcul simplu că $A'=C^{-1}AC$.

5.2 Exerciţii propuse

1. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricele:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ pentru $a \in \mathbf{R}$;

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Valorile proprii ale matricei A fiind cunoscute determinaţi valorile proprii ale matricelor A^{-1} şi A^2.

3. Dacă polinomul caracteristic al matricei $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$ este $F(\lambda)$ găsiţi determinantul matricei $f(A)$, unde

$$f = b_0 (X - \xi_1) \cdots (X - \xi_m)$$

este un polinom.

Indicaţie: Avem

$$f(A) = b_0 (A - \xi_1 I) \cdots (A - \xi_m I)$$

Deci

$$\det f(A) = b_0^n \cdot \det(A - \xi_1 I) \cdot \cdots \det(A - \xi_m I) = b_0^n \cdot F(\xi_1) \cdots F(\xi_m)$$

4. Dacă polinomul caracteristic al matricei $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$ este

$$F(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

atunci determinantul matricei $f(A)$, unde

$$f = b_0 (X - \xi_1) \cdots (X - \xi_m)$$

este

$$\det f(A) = f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_n)$$

5. Valorile proprii ale matricei $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$ fiind cunoscute găsiţi valorile proprii ale matricei $f(A)$, f fiind un polinom.
Indicaţie: Notăm
$$g(x) = f(x) - \lambda$$
Conform exerciţiului precedent avem
$$\det(f(A) - \lambda I) = \det g(A) = g(\lambda_1)\cdots g(\lambda_n) = (f(\lambda_1) - \lambda)\cdots(f(\lambda_n) - \lambda)$$
din care deducem că ecuaţia caracteristică
$$\det(f(A) - \lambda I) = 0\ ;\ \lambda \in \mathbf{K}$$
are soluţiile: $\lambda_1' = f(\lambda_1), \cdots, \lambda_n' = f(\lambda_n)$.

6. Arătaţi că vectorii proprii ai matricei $A \in \mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$ sunt şi vectori proprii ai matricei $f(A)$, f fiind un polinom.
Indicaţie: Fie
$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$$
unde $a_i \in \mathbf{K}$ pentru $i \in \{1, ..., m\}$ şi V un vector propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ. Avem
$$\left\{\begin{array}{rl|l} IV = & V & a_0 \\ AV = & \lambda V & a_1 \\ A^2V = & \lambda^2 V & a_2 \\ & & \cdots \\ A^mV = & \lambda^m V & a_m \end{array}\right.$$
După ce înmulţim cu $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$, aşa cum am indicat în tabloul de mai sus, şi adunăm toate relaţiile obţinem
$$f(A)V = f(\lambda)V$$
din care deducem că V este vector propriu al matricei $f(A)$ corespunzător valorii proprii $f(\lambda)$.

7. Reduceţi la forma Jordan matricele:

(a) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

8. Determinaţi polinomul caracteristic, spectrul şi subspaţiile proprii asociate pentru fiecare dintre endomorfismele de mai jos:

(a) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ a cărui matrice în baza canonică E a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$\frac{fE}{E} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$ a cărui matrice în baza canonică E a lui $\mathbf{C}^2$ este

$$\frac{fE}{E} = \begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}$$

(c) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ definit prin

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ &\quad , x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \end{aligned}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$;

(d) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ a cărui matrice în baza canonică E a lui $\mathbf{R}^4$ este

$$\frac{fE}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_2[X])$ definit prin

$$f(p) = 2p + (X+1)p'$$

pentru orice $p \in \mathbf{R}_2[X]$;

(f) $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_2[X])$ definit prin

$$f(p) = p'$$

pentru orice $p \in \mathbf{R}_2[X]$;

(g) $f \in \mathcal{L}(M_2[\mathbf{R}])$, definit prin

$$f(A) = A^t$$

pentru orice $A \in M_2[\mathbf{R}]$.

9. Să se găsească valorile proprii şi subspaţiile proprii şi apoi să se diagonalizeze matricea ortogonală

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

10. Determinaţi polinomul de matrice

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Calculaţi A^{-1}şi A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ folosind teorema lui Hamilton -Cayley.

12. Calculaţi matricele e^A şi A^m pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

13. Să se determine polinomul caracteristic al matricei lui Frobenius

$$F = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$ endomorfismul a cărui matrice în raport cu baza canonică E a lui $\mathbf{C}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Arătaţi că f este hermitic şi determinaţi o bază a lui $\mathbf{C}^3$ faţă de care matricea endomorfismului are formă diagonală.

Capitolul 6

Funcţionale pătratice

6.1 Exerciţii rezolvate

1. Arătaţi că $f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

pentru orice $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$ din $\mathbf{R}^2$, este o funcţională biliniară.
Rezolvare: Fie $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$ şi $a, b \in \mathbf{R}$. Avem

$$\begin{aligned} f(ax+by,z) &= (ax_1+by_1)z_1 + 2(ax_1+by_1)z_2 - 3(ax_2+by_2)z_1 + \\ +4(ax_2+by_2)z_2 &= af(x,z) + bf(y,z) \end{aligned}$$

Analog se verifică şi egalitatea

$$f(x, ay+bz) = af(x,y) + bf(x,z)$$

ceea ce arată că f este o funcţională biliniară.

2. Reduceţi la forma canonică funcţionala pătratică $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.
Rezolvare: Matricea lui Q faţă de baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

deci suntem în cazul $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. În această situaţie, deoarece $a_{12} = \frac{1}{2} \neq 0$, trebuie să facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Obţinem

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') + 2(x_1' + x_2')x_3' + 3(x_1' - x_2')x_3' = \\ &= (x_1')^2 - (x_2')^2 + 5x_1'x_3' - x_2'x_3' = \\ &= \left(x_1' + \frac{5}{2}x_3'\right)^2 - (x_2')^2 - x_2'x_3' - \frac{25}{4}(x_3')^2 \end{aligned}$$

Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + \frac{5}{2}x_3' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = x_3' \end{cases}$$

şi obţinem

$$Q(x) = (x_1'')^2 - (x_2'')^2 - x_2''x_3'' - \frac{25}{4}(x_3'')^2 = (x_1'')^2 + Q_1(x)$$

unde $Q_1(x) = -(x_2'')^2 - x_2''x_3'' - \frac{25}{4}(x_3'')^2$. Ne ocupăm în continuare de funcţionala pătratică bidimensională $Q_1(x)$. Mai întâi vom scrie ultima schimbare de coordonate sub forma

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' - \frac{5}{2}x_3'' \\ x_2' = x_2'' \\ x_3' = x_3'' \end{cases}$$

Acum putem scrie

$$Q_1(x) = -\left(x_2'' + \frac{1}{2}x_3''\right)^2 - 6(x_3'')^2$$

Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' + \frac{1}{2}x_3'' \\ x_3''' = x_3'' \end{cases}$$

şi obţinem $Q_1(x) = -(x_2''')^2 - 6(x_3''')^2$, deci

$$Q(x) = (x_1''')^2 - (x_2''')^2 - 6(x_3''')^2$$

Ultima schimbare de coordonate se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} x_1'' = x_1''' \\ x_2'' = x_2''' - \frac{1}{2}x_3''' \\ x_3'' = x_3''' \end{cases}$$

Succesiunea de schimbări de coordonate a condus la schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x_1''' + x_2''' - 3x_3''' \\ x_2 = x_1''' - x_2''' - 2x_3''' \\ x_3 = x_3''' \end{cases}$$

Această schimbare de coordonate este rezultatul trecerii de la baza canonică $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la o bază $E''' = \{e_1''', e_2''', e_3'''\}$. Se ştie că au loc relaţiile:

$$E''' = E \cdot \frac{E'''}{E}, \frac{x}{E} = \frac{E'''}{E} \cdot \frac{x}{E'''}$$

deci

$$\frac{x}{E} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \frac{E'''}{E} \cdot \frac{x}{E'''} \qquad (6.1)$$

din care deducem

$$\frac{E'''}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi

$$\begin{cases} e_1''' = e_1 + e_2 = (1, 1, 0) \\ e_2''' = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \\ e_3''' = -3e_1 - 2e_2 + e_3 = (-3, -2, 1) \end{cases}$$

Reprezentarea analitică a funcţionalei pătratice Q în raport cu baza E''' este tocmai forma canonică

$$Q(x) = x_1'''^2 - x_2'''^2 - 6x_3'''^2$$

Matricea funcţionalei pătratice Q în raport cu baza E''' este

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Putem verifica uşor relaţia $A''' = \left(\frac{E'''}{E}\right)^t \cdot A \cdot \frac{E'''}{E}$.

3. Reduceţi la forma canonică funcţionala pătratică $Q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 12x_2x_4 + 2x_3x_4$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$.

Rezolvare: Matricea lui Q în baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prin grupări convenabile rezultă

$$Q(x) = (x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 + 5x_4^2$$

Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_2' = x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_3' = x_3 - x_4 \\ x_4' = x_4 \end{cases}$$

şi obţinem forma canonică a lui Q

$$Q(x) = x_1'^2 - 2x_2'^2 + x_3'^2 + 5x_4'^2$$

Baza în care este reprezentată analitic funcţionala Q este

$$E' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$$

obţinută prin trecere de la baza canonică E a spaţiului $\mathbf{R}^4$ cu ajutorul matricei de trecere $\dfrac{E'}{E}$ pe care o vom explicita imediat. Exprimând coordonatele x_1, x_2, x_3 şi x_4 în funcţie de coordonatele x_1', x_2', x_3' şi x_4' obţinem

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' + 2x_3' - 2x_4' \\ x_2 = x_2' - x_3' + x_4' \\ x_3 = x_3' + x_4' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$$

din care deducem că matricea de trecere de la baza E la baza E' este

$$\frac{E'}{E}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Din relaţia $E'=E\cdot\dfrac{E'}{E}$ deducem

$$\begin{cases}e_1'= & e_1 & & & =(1,0,0,0)\\ e_2'= & -e_1 & +e_2 & & =(-1,1,0,0)\\ e_3'= & 2e_1 & -e_2 & +e_3 & =(2,-1,1,0)\\ e_4'= & -2e_1 & +e_2 & +e_3+e_4 & =(-2,1,1,1)\end{cases}$$

Matricea lui Q în raport cu baza E' este

$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

Putem verifica uşor relaţia$A'=\left(\dfrac{E'}{E}\right)^t\cdot A\cdot\dfrac{E'}{E}$.

4. Reduceţi la forma canonică funcţionala pătratică $Q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ definită prin

$$Q(x)=2x_1^2-3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

pentru orice $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

Rezolvare: Matricea lui Q în baza canonică $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^3$ este

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-3&2\\-2&2&1\end{pmatrix},$$

iar determinanţii

$$\Delta_1=2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}=-7,\ \Delta_3=\det A=-11$$

sunt nenuli. Deducem că există o bază $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ faţă de care reprezentarea analitică a lui Q are forma canonică

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x'_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(x'_1)^2 - \frac{2}{7}(x'_2)^2 + \frac{7}{11}(x'_3)^2 \end{aligned}$$

Vectorii bazei E' au forma

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ e'_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3 \end{cases}$$

Condiţiile $f\left(e'_j, e_i\right) = \delta_{ij}$ pentru $j \leq i$, unde f este polara lui Q, ne conduc la:

1) $c_{11}f\left(e'_1, e_1\right) = 1$, adică $2c_{11} = 1$ din care deducem $c_{11} = \frac{1}{2}$.

2)

$$\begin{cases} 2c_{12} + c_{22} = 0 \\ c_{12} - 3c_{22} = 1 \end{cases}$$

din care obţinem $c_{12} = \frac{1}{7}$ şi $c_{22} = -\frac{2}{7}$.

3)

$$\begin{cases} 2c_{13} + c_{23} - 2c_{33} = 0 \\ c_{13} - 3c_{23} + 2c_{33} = 0 \\ -2c_{13} + 2c_{23} + c_{33} = 1 \end{cases}$$

din care obţinem $c_{13} = \frac{4}{11}, c_{23} = \frac{6}{11}, c_{33} = \frac{7}{11}$. Deci

$$\begin{cases} e'_1 = \frac{1}{2}e_1 \\ e'_2 = \frac{1}{7}e_1 + -\frac{2}{7}e_2 \\ e'_3 = \frac{4}{11}e_1 + \frac{6}{11}e_2 + \frac{7}{11}e_3 \end{cases}$$

Matricea de trecere de la baza canonică E la baza E' este

$$\frac{E'}{E} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/7 & 4/11 \\ 0 & -2/7 & 6/11 \\ 0 & 0 & 7/11 \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte coordonatele în cele două baze sunt legate prin relaţia

$$\frac{x}{E} = \frac{E'}{E} \cdot \frac{x}{E'}$$

adică

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/7 & 4/11 \\ 0 & -2/7 & 6/11 \\ 0 & 0 & 7/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Deci

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{7}x_2' + \frac{4}{11}x_3' \\ x_2 = -\frac{2}{7}x_2' + \frac{6}{11}x_3' \\ x_3 = \frac{7}{11}x_3' \end{cases}$$

şi rezolvarea este completă.

5. Reduceţi la forma canonică funcţionala pătratică $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Rezolvare: Matricea lui Q în raport cu baza canonică E a lui $\mathbf{R}^2$ este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Ecuaţia caracteristică a matricei A este

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

şi are soluţiile $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = -2$. Am obţinut pentru Q forma canonică

$$Q(x) = 3(x_1')^2 - 2(x_2')^2$$

unde $x = x_1'e_1' + x_2'e_2' \in \mathbf{R}^2$, $E' = \{e_1', e_2'\}$ fiind o bază a lui $\mathbf{R}^2$ care urmează a fi determinată. Pentru aceasta căutăm spaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii găsite.Pentru fiecare valoare proprie λ formăm ecuaţia matriceală

$$(A - \lambda I_2) \cdot X = 0; X \in \mathbf{M}_{2\times 1}[\mathbf{R}]$$

adică

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 1}[\mathbf{R}]$$

Sub formă scalară ecuaţia matriceală se transformă în sistemul liniar

$$\begin{cases} (2-\lambda)\,x_1 + & 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + & (-1-\lambda)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

care trebuie rezolvat. Concret, pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$ sistemul devine

$$\begin{cases} -x_1 + & 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - & 4x_2 = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

a cărui soluţie este $S_{\lambda_1} = \{(2t,t)\,|t \in \mathbf{R}\}$. Pentru $\lambda = \lambda_2 = -2$ sistemul devine

$$\begin{cases} 4x_1 + & 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + & x_2 = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

a cărui soluţie este

$$S_{\lambda_2} = \{(t,-2t)\,|t \in \mathbf{R}\}$$

Alegem vectorii proprii

$$\begin{pmatrix} e_1' == \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \in S_{\lambda_1} \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) \in S_{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

care compun baza ortonormată $E' = \{e_1', e_2'\}$ a lui $\mathbf{R}^2$. Matricea de trecere de la baza canonică E a lui $\mathbf{R}^2$ la baza E' este

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ale cărei coloane sunt formate din componentele vectorilor e_1'şi respectiv e_2'. Relaţia dintre coordonatele unui vector oarecare $x \in \mathbf{R}^2$ în raport cu cele două baze este

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x}{E} = \frac{E'}{E}\cdot\frac{x}{E'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

adică, mai concret,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1' - 2x_2') \end{cases}$$

Relaţia inversă dintre coordonate este

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2x_2) \end{cases}.$$

Putem face şi o verificare:

$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = 2\cdot\frac{1}{5}(2x_1' + x_2')^2 + 4\cdot\frac{1}{5}(2x_1' + x_2')(x_1' - 2x_2') - \frac{1}{5}(x_1' - 2x_2')^2 =$
$= 3(x_1')^2 - 2(x_2')^2.$

6.2 Exerciţii propuse

1. Arătaţi că
$$f : \mathbf{R}_2[X] \times \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}$$
definită prin $f(p,q) = p(0)q(0) - p'(0)q'(0)$, pentru orice $p, q \in \mathbf{R}_2[X]$, este o funcţională biliniară. Determinaţi matricea lui f în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}_2[X]$.

2. Determinaţi matricea formei biliniare $f \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ definită prin
$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_3y_2$$
pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)$ din $\mathbf{R}^3$, în raport cu baza canonică E a lui $\mathbf{R}^3$ şi în raport cu baza $E' = (e_1', e_2', e_3')$, unde $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,1,0)$ şi $e_3' = (1,0,0)$.

3. Determinaţi signatura funcţionalelor pătratice $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ cărora le corespund, în baza canonică, matricele:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determinaţi signatura funcţionalelor pătratice $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cărora le corespund, în baza canonică, matricele:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -2 \\ -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Reduceţi la forma canonică funcţionalele pătratice $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$:

   (a) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   (b) $f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, unde $x = = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   (c) $f(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   (d) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

   (e) $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, unde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

6. Reduceţi la forma canonică funcţionalele pătratice $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$:

   (a) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 - 2x_3x_4$, unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$;

   (b) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + +8x_2x_4 + 4x_3x_4$, unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$.

7. Determinaţi numărul $m \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţionalele pătratice de mai jos să fie pozitiv definite:

   (a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

   $$f(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + mz^2 + 4xy - 2xz - 2yz$$

   pentru orice $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;

   (b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

   $$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2mxy + 10xz + 6yz$$

   pentru orice $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Capitolul 7

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

7.1 Noţiuni fundamentale şi exemple

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi se întâlnesc sub următoarele forme:

1) $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$, unde $F : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcţie care depinde efectiv de $\dfrac{dy}{dx}$, numită forma generală,

2) $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, unde $f : E \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcţie dată, numită forma normală, şi

3) $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, unde $P, Q : E \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcţi date, numită forma Pfaff.

Prin soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se înţelege o funcţie de forma $y : I \longrightarrow \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, cu proprietatea:

1) $F\left(x, y(x), \dfrac{dy(x)}{dx}\right) = 0$, pentru orice $x \in I$,

2) $\dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, pentru orice $x \in I$, respectiv

3) $P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Observaţii. 1) În ecuaţiile diferenţiale de mai sus, litera y este numită funcţie necunoscută, iar x este numită variabilă independentă. Expresia $\dfrac{dy}{dx}$ se înlocuieşte adesea prin y'. Într-o ecuaţie diferenţială, funcţia necunoscută şi variabila independentă pot fi desemnate prin orice simboluri, dacă nu se crează confuzii. În cazuri concrete litera y este "eticheta" unei mărimi fizice sau de altă natură cum ar fi: masa, spaţiu, viteza, acceleraţia, intensitatea, tensiunea, concentraţia, etc. Variabila independentă este adesea timpul, desemnat prin t.

2) Din definiţie rezultă că soluţia $y : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este derivabilă pe I şi $\left(x, y(x), \dfrac{dy}{dx}(x)\right) \in D$, respectiv $(x, y(x)) \in E$, pentru orice $x \in I$. Dacă J este un interval inclus în I atunci restricţia lui y la J este soluţie pe J a ecuaţiei respective.

3) Soluţia din definiţie se indică uneori prin: $y = y(x)$, $x \in I$. Pentru exprimarea unor proprietăţi în care intervin soluţii, uneori, prin abuz de limbaj, o soluţie se desemnează sub forma "$y(x)$" înţelegând că este vorba de funcţia $x \longrightarrow y(x)$ şi nu de valoarea acestei funcţii în punctul x.

4) Determinarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale este un proces complex, numit rezolvarea (sau integrarea) ecuaţiei diferenţiale respective. Mulţimea de definiţie a unei soluţii se determină, de regulă, în procesul rezolvării.

Exemplul 7.1 O soluţie pentru ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$xy + \frac{dy}{dx} - x^3 - 2x = 0$$

este $y = x^2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, înlocuind pe y cu x^2 obţinem

$$x \cdot x^2 + \frac{d}{dx}x^2 - x^3 - 2x = x \cdot x^2 + 2x - x^3 - 2x = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$$

Curbă integrală. Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte curbă integrală a acelei ecuaţii diferenţiale.

Observaţii. 1) Dacă o curbă $\gamma \subset \mathbf{R}^2$, definită parametric prin

$$\gamma : \begin{cases} x &= \alpha(t) \\ y &= \beta(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R} \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbf{R}$, este curbă integrală a unei ecuaţii diferenţiale, adică este graficul unei soluţii, atunci se spune că sistemul

$$\begin{cases} x &= \alpha(t) \\ y &= \beta(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R} \end{cases}$$

este reprezentarea parametrică a acelei soluţii.

2) Dacă γ este o curbă definită implicit sub forma

$$\gamma : g(x, y) = 0,$$

unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 în E şi $g'_y(x, y) \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in E$, atunci, pentru orice punct $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, există un interval deschis I_0, care conţine pe x_0, şi o funcţie unică $\phi : I_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ cu proprietăţile: $\phi(x_0) = y_0$, $\quad g(x, \phi(x)) = 0$,

$$\phi'(x) = -g'_x(x, \phi(x)) / g'_y(x, \phi(x)),$$

pentru orice $x \in I_0$. Graficul $\{(x, \phi(x)) \mid x \in I_0\}$ al funcţiei ϕ este inclus în γ; de aceea, în condiţiile de mai sus, curba γ va fi curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale generale dacă

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = F\left(x, \phi(x), -\frac{g'_x(x, \phi(x))}{g'_y(x, \phi(x))}\right) = 0$$

pentru orice $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, şi $x \in I_0$. În particular, pentru $x = x_0$, egalitatea devine

$$F\left(x_0, y_0, -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}\right) = 0$$

pentru orice (x_0, y_0)cu proprietatea $g(x_0, y_0) = 0$.

3) Ecuaţia diferenţială sub forma Pfaff se poate scrie sub forma normală

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

dacă funcţia Q nu se anulează în E. Dacă funcţia P nu se anulează în E, atunci ecuaţia diferenţială se poate scrie sub forma normală $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, în care x este considerată funcţie necunoscută, iar y este variabila independentă.

7.1.1 Problema Cauchy

Principala problemă pentru o ecuaţie diferenţială este rezolvarea sau integrarea sa, adică determinarea soluţiilor sale. Problemele concrete care conduc la ecuaţii diferenţiale nu cer cunoaşterea tuturor soluţiilor, ci doar a unor soluţii care îndeplinesc anumite condiţii. O problemă practică importantă şi frecvent întâlnită este problema, numită problemă Cauchy, care constă în determinarea unei curbe integrale a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi care trece printr-un punct dat. Mai precis:

Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este problema care constă în determinarea unei soluţii $y = y(x)$, $x \in I$, a acelei ecuaţii care verifică condiţia $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbf{R}$ sunt numere date. Condiţia $y(x_0) = y_0$, se numeşte condiţie iniţială sau condiţie Cauchy.

7.1.2 Soluţii

Soluţia generală. Se numeşte soluţie generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, pe mulţimea $E \subset \mathbf{R}^2$, o familie S de soluţii ale acelei ecuaţii diferenţiale cu proprietatea că pentru orice punct $(x_0, y_0) \in E$ există o singură soluţie $\phi \in S$ astfel încât $\phi(x_0) = y_0$.

Observaţie. Soluţia generală se indică de obicei sub forma $y = \phi(x, c)$, $x \in I$, unde c este o constantă arbitrară.

Exemplul 7.2 Pentru ecuaţia diferenţială $\frac{dy}{dx} - y + x^2 - 2x = 0$, funcţia

$$y = ce^x + x^2,\ x \in \mathbf{R},$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară, este soluţie generală pe $\mathbf{R}^2$. Într-adevăr, înlocuind în ecuaţie obţinem

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} - y(x) + x^2 - 2x &= ce^x + 2x - \left[ce^x + x^2\right] + \\ +x^2 - 2x &= 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

pentru fiecare $c \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte, pentru orice $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, punând condiţia $y_0 = c_0 e^{x_0} + x_0^2$, deducem $c_0 = (y_0 - x_0^2)\, e^{-x_0}$. Rezultă că $y = c_0 e^x + x^2,\ x \in \mathbf{R}$, este soluţia care verifică condiţia Cauchy $y(x_0) = y_0$.

Soluţie particulară. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, care aparţine unei soluţii generale a acelei ecuaţii diferenţiale, se numeşte soluţie particulară.

Observaţie. O soluţie particulară se obţine din soluţia generală pentru o valoare particulară a parametrului.

Exemplul 7.3 În exemplu precedent, funcţia $y = y(x, 0) = x^2,\ x \in \mathbf{R}$, este o soluţie particulară, obţinută din soluţia generală menţionată pentru $c = 0$.

Soluţie singulară. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale care nu este soluţie particulară se numeşte soluţie singulară.

Integrala unei ecuaţii diferenţiale. O relaţie de forma $g(x, y) = 0$, unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, se numeşte integrală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi dacă această relaţie defineşte implicit pe y ca funcţie de x, pe o mulţime $I \subset \mathbf{R}$, şi această funcţie este soluţie pe I a acelei ecuaţii diferenţiale. Integrala unei ecuaţii diferenţiale se mai numeşte şi soluţie definită implicit.

Se numeşte integrală generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi o relaţie de forma $g(x, y) = c$, unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, cu proprietatea că pentru fiecare $(x_0, y_0) \in E$ relaţia

$$g(x, y) = g(x_0, y_0)$$

defineşte implicit pe y ca funcţie de x, pe o vecinătate $I_0 \subset \mathbf{R}$ a lui x_0, şi această funcţie este soluţie pe I_0 a acelei ecuaţii diferenţiale.

Exemplul 7.4 Pentru ecuaţia diferenţială $y'(3y^2 + x) + y = 0$, relaţia $xy + y^3 = c$, unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară, este integrală generală. Într-adevăr, considerând funcţia

$$\alpha(y) = xy + y^3 - c,\ y \in \mathbf{R},$$

pentru un număr $c \in \mathbf{R}$ şi un număr $x \in (0, \infty)$, avem tabloul de variaţie

y	$-\infty$					$+\infty$
$\alpha'(y) = x + 3y^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	
$\alpha(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

,

din care rezultă că există un singur număr $y(x,c) \in \mathbf{R}$ astfel încât $\alpha(y(x,c)) = 0$. Aşadar, ecuaţia $xy + y^3 = c$ defineşte implicit funcţia $x \to y(x,c)$, $x \in (0,\infty)$. Derivând identitatea

$$xy(x,c) + y^3(x,c) = c,\ x \in (0,\infty)$$

obţinem

$$y(x,c) + xy'(x,c) + 3y^2(x,c)\,y'(x,c) = 0$$

din care rezultă

$$y'(x,c) = -\frac{y(x,c)}{x + 3y^2(x,c)},\ x \in (0,\infty)$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială considerată obţinem

$$y'(x,c)\left[3y^2(x,c) + x\right] + y(x,c) = -\frac{y(x,c)}{x + 3y^2(x,c)}\left[3y^2(x,c) + x\right] + y(x,c) = 0,$$

pentru orice $x \in (0,\infty)$, ceea ce trebuia demonstrat. Pe de altă parte, pentru orice $x_0 \in (0,\infty)$ şi y_0 din $\mathbf{R}$, luând $c_0 = x_0 y_0 + y_0^3$, rezultă că soluţia $y = y(x, c_0)$ verifică condiţia iniţială $y(x_0, c_0) = y_0$.

7.1.3 Tipuri elementare de ecuaţii

Ecuaţia diferenţială $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Fie $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă definită pe un interval E. Ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

este cel mai simplu model de ecuaţie diferenţială. Soluţia sa, care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, este

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz,\ (\forall)\ x \in I$$

Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $y(x) = y_0 + F(x) - F(x_0)$, $(\forall)\, x \in I$. Notând $y_0 - F(x_0)$ cu c, rezultă că forma soluţiei generale este $y = F(x) + c$; $x \in I$, c fiind o constantă oarecare.

Exemplul 7.5 Ecuaţia diferenţială $y' = x + \sin x$ are soluţia generală

$$y = \int (x + \sin x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c;\ x \in \mathbf{R},$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Ecuaţii diferenţiale exacte. Ecuaţiile diferenţiale exacte sunt ecuaţiile de forma

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0,$$

unde $P, Q : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue care nu se anulează în acelaşi punct din E, iar $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există, sunt continue şi egale pe E. Noi vom presupune că E este un interval bidimensional deschis de forma $E = (a,b) \times (c,d)$, şi că funcţia Q nu se anulează în E. În această ipoteză ecuaţia considerată se poate scrie sub forma $y' = -P(x,y)/Q(x,y)$. Se arată că există o funcţie $u(x,y)$, definită în E, astfel încât

$$du(x,y) = P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

Soluţia generală se exprimă implicit sub forma $u(x,y) = c$, iar u poate fi dată prin

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\, dy,$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere reale arbitrare astfel încât $(x_0, y_0) \in E$. Soluţia care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ corespunde lui $c = 0$.

Exemplul 7.6 Determinaţi integrala generală a ecuaţici diferenţiale

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right) dx + \frac{x}{2\sqrt{y}}dy = 0$$

Rezolvare: Avem $P(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}$, $Q(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$, iar domeniul de definiţie al funcţiilor P şi Q este $E = (0,\infty) \times (0,\infty)$. Avem $P'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $Q'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, deci $P'_y = Q'_x$, adică ecuaţia considerată este exactă. Integrala ei generală este

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{2\sqrt{y}}dy = c,$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere pozitive arbitrare. Efectuând calculele obţinem

$$2\sqrt{x} + x\sqrt{y} - (2\sqrt{x_0} + x_0\sqrt{y_0}) = c$$

Dacă notăm $2\sqrt{x_0} + x_0\sqrt{y_0} + c = C$, rezultă integrala generală sub forma $2\sqrt{x} + x\sqrt{y} = C$, unde C este o constantă pozitivă oarecare. Observăm că, în acest caz, putem explicita pe y sub forma $y = \frac{(C - 2\sqrt{x})^2}{x^2}$, $x \in (0,\infty)$.

Exemplul 7.7 Ecuaţia diferenţială $xdx+ydy=0$ are integrala generală $x^2+y^2=C$. Într-adevăr, $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2-C)$ are diferenţiala $du=\frac{1}{2}(2xdx+2ydy)=xdx+ydy$. Pentru $C=x_0^2+y_0^2$ se obţine integrala care defineşte soluţia ce trece prin punctul (x_0,y_0).

Exemplul 7.8 Determinaţi integrala generală a ecuaţiei diferenţiale $(x^3+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$.

Integrala generală este

$$\int_{x_0}^{x}(x^3+y)\,dx+\int_{y_0}^{y}(x_0-y)\,dy=c,$$

unde (x_0,y_0) este un punct arbitrar în $\mathbf{R}^2$. Deducem

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x_0^4}{4}+yx-yx_0+x_0y-x_0y_0-\frac{y^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=c,$$

Notînd $C=c+\frac{x_0^4}{4}+y_0x_0-\frac{y_0^2}{2}$, deducem $\frac{x^4}{4}+yx-\frac{y^2}{2}=C$, unde C este o constantă oarecare.

Metoda factorului integrant. Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi sub forma Pfaff

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0,$$

unde $P,Q:E\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$. Presupunem că $E=(a,b)\times(c,d)$, este un interval bidimensional. Deasemenea, presupunem că P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt funcţii continue pe E şi $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. Fie $\mu:E\to\mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe E, care nu se anulează în E. Înmulţind cu μ ecuaţia dată, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx+\mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy=0$$

Căutăm funcţia μ astfel încât ecuaţia obţinută să fie exactă, adică astfel încât

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu P]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu Q]$$

Funcţia μ cu această proprietate se numeşte factor integrant pentru ecuaţia dată. Condiţia impusă lui μ se scrie detaliat sub forma

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Dacă μ verifică această condiţie atunci integrala generală a ecuaţiei date este

$$\int_{x_0}^{x}\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}\mu(x_0,y)\,Q(x_0,y)\,dy=c$$

În general determinarea funcţiei μ este la fel de dificilă ca şi rezolvarea ecuaţiei diferenţiale considerate, dar se pot identifica unele cazuri particulare în care se pot determina factori integranţi.

Cazul I. Factor integrant care depinde numai de x. Presupunem că există un factor integrant care depinde numai de x, adică de forma $\mu = \mu(x)$. Condiţia îndeplinită de μ se scrie, înlocuind $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ şi $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'$, sub forma

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

Deoarece $\dfrac{\mu'}{\mu}$ depinde numai de x rezultă că egalitatea este posibilă numai dacă expresia $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q}$ depinde numai de x. În acest caz rezultă

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx\right)$$

Integrala generală este în acest caz

$$\int_{x_0}^{x} \mu(x) P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0) Q(x_0, y)\, dy = c$$

Cazul II. Factor integrant care depinde numai de y. Presupunem că există un factor integrant care depinde numai de y, adică de forma $\mu = \mu(y)$. Condiţia îndeplinită de μ se scrie, înlocuind $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ şi $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'$, sub forma

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}$$

Deoarece $\dfrac{\mu'}{\mu}$ depinde numai de y rezultă că egalitatea este posibilă numai dacă expresia $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ depinde numai de y. În acest caz rezultă

$$\mu(y) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy\right)$$

Integrala generală este în acest caz

$$\int_{x_0}^{x} \mu(y) P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \mu(y) Q(x_0, y)\, dy = c$$

Exemplul 7.9 Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$-ydx + \left(x + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$$

care verifică condiţia iniţială $y(1) = 2$.

Rezolvare: Considerăm funcţiile $P = -y$ şi $Q = x + \frac{x^2}{y^2}$, definite pe $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Deoarece

$$P'_y = -1 \text{ şi } Q'_x = 1 + \frac{2x}{y^2},$$

rezultă că $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, deci ecuaţia diferenţială nu este exactă. Cercetăm dacă ecuaţia admite factor integrant care să depindă numai de o variabilă. Avem

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{-1-1-\frac{2x}{y^2}}{x+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-2\left(1+\frac{x}{y^2}\right)}{x\left(1+\frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{2}{x},$$

din care deducem că ecuaţia admite un factor integrant care depinde numai de x, şi anume

$$\mu = \exp\left(\int_1^x \left(-\frac{2}{x}\right)dx\right) = \exp\left(-2\ln x + 2\ln 1\right) = \frac{1}{x^2}$$

Înmulţind ecuaţia cu $\mu = \frac{1}{x^2}$ obţinem ecuaţia diferenţială exactă

$$-\frac{y}{x^2}dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

a cărei integrală este

$$\int_1^x -\frac{y}{x^2}dx + \int_2^y \left(1+\frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

Efectuând calculele obţinem $\frac{y}{x} - y + y - 2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0$, adică $\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$.

Ecuaţia diferenţială cu variabile separabile. Forma Pfaff a ecuaţiilor diferenţiale cu variabile separabile este

$$f(x)\,g(y)\,dx + h(x)\,k(y)\,dy = 0$$

unde $f,h : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g,k : F \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, E şi F sunt intervale, g nu se anulează în F, iar h nu se anulează în E. În aceste condiţii ecuaţia admite factorul integrant $\mu = \frac{1}{g(y)\,h(x)}$. Înmulţind cu μ ecuaţia dată, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\frac{f(x)}{h(x)}dx + \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0$$

Se spune, în acest caz, că am separat variabilele în ecuaţia dată. Am obţinut o ecuaţie diferenţială exactă. Soluţia sa generală este

$$\int_{x_0}^x \frac{f(x)}{h(x)}dx + \int_{y_0}^y \frac{k(y)}{g(y)}dy = c$$

unde $x_0 \in E$ şi $y_0 \in F$ sunt numere arbitrare.

Dacă $g(y_0) = 0$, atunci $y = y_0$, pentru orice $x \in E$, este soluţie singulară. Dacă $h(x_0) = 0$, atunci $x = x_0$, pentru orice $y \in F$, este soluţie singulară.

Exemplul 7.10 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$$

Rezolvare: Separând variabilele obţinem

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0,$$

care este o ecuaţie diferenţială exactă. Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = c,$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere arbitrare. Făcând calculele obţinem $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$, unde C=$c + \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+y_0^2}$ este un număr oarecare mai mare sau egal cu 2.

Exemplul 7.11 Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}$$

Membrul drept al ecuaţiei este definit şi continuu pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi se anulează în $y = 0$. Funcţia $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$, este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale. Pe de altă parte, ecuaţia se poate prezenta sub forma a două ecuaţii:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{y},\ \textit{pentru}\ y > 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{-y},\ \textit{pentru}\ y < 0 \end{aligned}$$

Din prima ecuaţie, avem

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + C \ \ (x > -C)$$

Deci, $y = (x+C)^2$, $x > -C$, este soluţie generală în domeniul $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$.

Analog, din a doua ecuaţie, avem

$$\frac{dy}{2\sqrt{-y}} = dx \Rightarrow -\sqrt{-y} = x + C \ \ (x < -C)\,,\ y = (x+C)^2\,,\ x > -C$$

Deci, $y = -(x+C)^2$, $x < -C$, este soluţie generală în domeniul $-\infty < x < \infty, -\infty < y < 0$. Soluţia $y = 0$ este o soluţie singulară deoarece ea nu aparţine soluţiei generale.

Exemplul 7.12 Integraţi ecuaţia diferenţială

$$x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0,$$

unde $x\in[-1,1]$, $y\in[-1,1]$.

Separînd variabilele, obţinem

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$$

De aici rezultă că

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C,\ C>0,$$

este integrala generală. Soluţiile

$$\begin{aligned} y &= 1,(-1<x<1);\ y=-1,(-1<x<1); \\ x &= 1,(-1<y<1);\ x=-1,(-1<y<1) \end{aligned}$$

sunt singulare.

Exemplul 7.13 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dx}{dt}=k(x-a)(x-b),$$

k, a şi b fiin constante date.

Rezolvare: Ecuaţia este cu variabile separabile. Când $a\neq b$, separînd variabilele, obţinem

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=kdt,\ \left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right]dx=k(a-b)\,dt$$

Integrînd, obţinem

$$\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|=k(a-b)\,t+\ln|c|,$$

Deducem $\dfrac{x-a}{x-b}=Ce^{k(a-b)t}$, de unde

$$x=\frac{bCe^{k(a-b)t}-a}{Ce^{k(a-b)t}-1}$$

Dacă punem condiţia $x(t_0)=x_0$, atunci obţinem $\dfrac{x_0-a}{x_0-b}=Ce^{k(a-b)t_0}$, din care deducem $C=\dfrac{x_0-a}{x_0-b}e^{-k(a-b)t_0}$. Soluţia căutată este

$$x=\frac{b(x_0-a)e^{k(a-b)(t-t_0)}-a(x_0-b)}{(x_0-a)e^{k(a-b)(t-t_0)}-(x_0-b)}$$

Ecuaţia diferenţială de tip omogen. Prin ecuaţie diferenţială de tip omogen se înţelege o ecuaţie diferenţială de forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

unde $f : E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcţie continuă dată. Pentru rezolvarea acestei ecuaţii diferenţiale se face schimbarea de funcţie $u = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, şi se ajunge la o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemplul 7.14 Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$, care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \neq 0$ şi y_0 sunt numere arbitrare.

Rezolvare: Ecuaţia fiind de tip omogen, facem schimbarea de funcţie $y = ux$. Avem

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Înlocuind în ecuaţie, obţinem $u + x\frac{du}{dx} = u^2 + u$. Deducem că $\frac{du}{u^2} - \frac{dx}{x} = 0$, şi deci

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = c$$

Rezultă $-\frac{1}{u} + \frac{1}{u_0} - \ln x + \ln x_0 = c$, adică $\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} + \ln x - \ln x_0 = -c$, din care deducem

$$y(x) = \frac{x}{-c - \ln x + \ln x_0 + \frac{x_0}{y_0}}$$

Din calculele făcute rezultă că numărul y_0 nu poate fi egal cu 0. Notând -c+$\ln x_0 + \frac{x_0}{y_0}$ cu C, rezultă $y(x) = \frac{x}{C - \ln x}$, adică am obţinut soluţia generală. Se verifică imediat că funcţia nulă $y = 0$, $x \in I$, unde I este un interval arbitrar care nu conţine pe 0, este soluţie a ecuaţiei considerate. Această soluţie, care verifică evident condiţia $y(x_0) = 0$, este soluţie singulară a ecuaţiei considerate.

Exemplul 7.15 Rezolvaţi ecuaţia diferenţială $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

Observăm că curbele integrale pot fi situate numai în cadranul I sau numai în cadranul III. Făcînd schimbarea de funcţie $y = zx$, obţinem:

$$z'x = z = \sqrt{z}, \quad \frac{dz}{\sqrt{z} - z} + \frac{dx}{x} = 0$$

Integrînd, obţinem

$$2\ln\left|\sqrt{z} - 1\right| + \ln|x| = \ln|C_1|,$$

sau

$$\left|\sqrt{z}-1\right|\sqrt{|x|}=\sqrt{|C_1|},\ \left(\sqrt{z}-1\right)\sqrt{|x|}=C,\ \left(C=\pm\sqrt{|C_1|}\right)$$

Întorcîndu-ne la funcţia y, obţinem $\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-1\right)\sqrt{|x|}=C$, de unde

$$\begin{aligned}\sqrt{y}-\sqrt{x} &= C,\ pentru\ x>0,\ y>0,\\ \sqrt{-y}-\sqrt{-x} &= C,\ pentru\ x<0,\ y<0\end{aligned}$$

Ecuaţia $z-\sqrt{z}=0$ are soluţiile $z=0$ şi $z=1$. Lor le corespund soluţiile $y=0$, $x\neq 0$ (soluţie singulară), şi $y=z$, $x\neq 0$ (soluţie particulară).

Exemplul 7.16 Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0,$$

unde funcţiile M şi N sunt omogene de acelaşi ordin (m), sunt ecuaţii de tip omogen. Făcînd substituţia $y=zx$, obţinem:

$$M(x,zx)\,dx+N(x,zx)\,(xdz+zdx)=0,$$

sau $x^mM(1,z)+x^mN(1,z)\,(xdz+zdx)=0$, sau

$$(M(1,z)+zN(1,z))\,dx+xN(1,z)\,dz=0,$$

care este o ecuaţie cu variabilele separabile.

Exemplul 7.17 Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0,$$

unde funcţiile M şi N verifică condiţiile

$$\begin{aligned}M\left(tx,t^ky\right) &= t^mM(x,y),\\ N\left(tx,t^ky\right) &= t^{m-k+1}N(x,y),\end{aligned}$$

pentru k şi m fixaţi, iar t arbitrar, se numesc ecuaţii generalizate de tip omogen. Ele se reduc la ecuaţii cu variabilele separabile prin substituţia $y=zx^k$. Într-adevăr, ecuaţia devine

$$M\left(x,zx^k\right)dx+N\left(x,zx^k\right)\left(x^kdz+zkx^{k-1}dx\right)=0,$$

sau $x^mM(1,z)\,dx+x^{m-k+1}x^{k-1}N(1,z)\,(xdz+zkdx)=0$, sau

$$(M(1,z)+kzN(1,z))\,dx+xN(1,z)\,dz=0,$$

care este o ecuaţie cu variabilele separabile. Pentru $k=1$ ecuaţia este de tip omogen.

Exemplul 7.18 Rezolvaţi ecuaţia diferenţială $(6 - x^2y^2)\,dx + x^2dy = 0$.
Notînd $M(x,y) = 6 - x^2y^2$ şi $N(x,y) = x^2$, avem

$$\begin{aligned} M\left(tx, t^k y\right) &= 6 - x^2y^2t^{2+2k} = t^0 M(x,y)\,, \ \textit{pentru } k = -1 \\ N\left(tx, t^k y\right) &= x^2t^2 = t^{0-k+1} N(x,y)\,, \ \textit{pentru } k = -1 \end{aligned}$$

Făcînd substituţia $y = zx^{-1}$, obţinem ecuaţia cu variabilele separabile

$$\left(6 - z^2 - z\right) dx + xdz = 0$$

Separînd variabilele şi integrînd, obţinem

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z^2 + z - 6} = 0,\ 5\ln|x| - \ln\left|\frac{z-2}{z+3}\right| = \ln|C|\,,\ x^5\frac{z+3}{z-2} = C,$$

din care deducem $z = \dfrac{3x^5 + 2C}{C - x^5}$. Revenind la y, obţinem soluţia generală

$$y = \frac{3x^5 + 2C}{x\left(C - x^5\right)}$$

Exemplul 7.19 Arătaţi că ecuaţiile diferenţiale de forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

unde $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{R}$, se reduc la ecuaţii de tip omogen sau cu variabilele separabile.

a) Dacă numerele c_1 şi c_2 sunt nule, avem

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right) = \phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

adică ecuaţia este de tip omogen. Presupunem că numerele c_1 şi c_2 nu sunt simultan nule.

b) Dacă $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, atunci făcînd schimbarea de funcţie $a_2x + b_2y = z$, ecuaţia devine:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= a_2 + b_2\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\frac{a_1}{a_2}z + c_1}{z + c_2}\right), \text{ adică} \\ \frac{dz}{dx} &= a_2 + b_2 f\left(\frac{\frac{a_1}{a_2}z + c_1}{z + c_2}\right), \end{aligned}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

c) Dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, atunci sistemul format din ecuaţiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ are o soluţie unică (α, β). Făcînd schimbarea de variabile $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, ecuaţia devine:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right),$$

care este de tip omogen (vezi cazul a).

Ecuaţia diferenţială liniară. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi are forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

unde $p, q : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue date. Considerăm că E este un interval de forma (a, b). Forma Pfaff a acestei ecuaţii este

$$(p(x)\,y - q(x))\,dx + dy = 0$$

Rezultă imediat că această ecuaţie nu este exactă, dar admite factorul integrant μ dat prin $\frac{\mu'}{\mu} = p(x)$. Obţinem $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx\right)$. Înmulţind cu μ forma Pfaff a ecuaţiei considerate, obţinem ecuaţia exactă

$$\mu(x)\,[p(x)\,y - q(x)]\,dx + \mu(x)\,dy = 0$$

Integrala generală a ecuaţiei considerate va fi

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(x)\,q(x)\,dx\right]$$

Această soluţie verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. De obicei soluţia generală este reprezentată sub forma

$$y = \frac{1}{\exp\left(\int p(x)\,dx\right)}\left[c + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx\right],$$

unde c este o constantă arbitrară, iar integralele nedefinite care intervin sunt primitive fixate ale funcţiilor respective.

Exemplul 7.20 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

Rezolvare: Ecuaţia diferenţială considerată este liniară. Faţă de modelul general avem $p(x) = \frac{1}{x}$ şi $q(x) = x^2$. Aceste funcţii sunt definite şi continue pentru orice $x \neq 0$. Vom determina soluţia generală pe $E = (0, \infty)$. Conform metodei de rezolvare expuse mai sus, soluţia generală este

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right)} \left[c + \int x^2 \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) dx\right] = \\ &= \frac{1}{x}\left[c + \int x^2 \cdot x dx\right] = \frac{1}{x}\left[c + \frac{x^4}{4}\right] = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} \end{aligned}$$

adică $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$, unde c este o constantă arbitrară.

Exemplul 7.21 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y' - \frac{2}{x} y = x$.

Ştim că, scrisă sub forma Pfaff

$$\left(-\frac{2}{x} y - x\right) dx + dy = 0,$$

ecuaţia admite un factor integrant $\mu(x)$ (care depinde numai de x). Avem

$$\mu(x)\left(-\frac{2}{x} y - x\right) dx + \mu(x)\, dy = 0$$

Condiţia ca această ecuaţie să fie exactă este

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\left(-\frac{2}{x} y - x\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)],$$

sau $\mu(x)\left(-\frac{2}{x}\right) = \mu'(x)$. Deducem o soluţie particulară: $\mu = \frac{1}{x^2}$. Ecuaţia devine

$$\left(-\frac{2}{x^3} y - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{x^2} dy = 0$$

Integrînd, obţinem succesiv:

$$\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{2}{x^3} y - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x_0^2} dy = 0,$$

adică $\frac{y}{x^2} - \frac{y}{x_0^2} - \ln|x| + \ln|x_0| + \frac{y}{x_0^2} - \frac{y_0}{x_0^2} = 0$, adică $\frac{y}{x^2} - \ln|x| = C$, sau

$$y = x^2 (C + \ln|x|)$$

Soluţia este definită în orice interval care nu conţine pe 0. Putem să scriem soluţia generală direct, folosind formula cunoscută:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\exp\left(\int -\frac{2}{x} dx\right)} \left[c + \int x \exp\left(\int -\frac{2}{x} dx\right) dx\right] = \\ &= x^2\left[c + \int \frac{1}{x} dx\right] = x^2 [c + \ln|x|] \end{aligned}$$

Exemplul 7.22 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei $xy' + 2x^2y = 1$.

Se observă uşor că soluţiile nu sunt definite în $x = 0$. Din acest motiv putem scrie ecuaţia sub forma

$$y' + 2xy = \frac{1}{x}$$

Acum observăm că este o ecuaţie liniară. Scriind-o sub forma Pfaff,

$$\left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + dy = 0,$$

putem să determinăm un factor integrant $\mu(x)$. Ecuaţia devine

$$\mu(x)\left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + \mu(x)\, dy = 0$$

Pentru a fi o ecuaţie exactă trebuie ca

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\left(2xy - \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\right],$$

adică $2x\mu(x) = \mu'(x)$, din care deducem $[\ln(\mu(x))]' = [x^2]'$, deci

$$\mu(x) = \exp\left(x^2\right)$$

Ecuaţia dată se transformă în ecuaţia exactă $\mu(x)\left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + \mu(x)\, dy = 0$. Integrînd, obţinem succesiv

$$\int_{x_0}^{x} \mu(x)\left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0)\, dy = 0,$$

deci $y\mu(x) - y\mu(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(x)}{x} dx + y\mu(x_0) - y_0\mu(x_0) = 0$. Rezultă soluţia

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[y_0\mu(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(x)}{x} dx\right],$$

care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. Expresia soluţiei generale este

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[C + \int \frac{\mu(x)}{x} dx\right],$$

unde C este o constantă arbitrară, iar $\int \frac{\mu(x)}{x} dx$ este o primitivă a lui $\frac{\mu(x)}{x}$.

Ecuaţia diferenţială a lui Bernoulli. Ecuaţiile diferenţiale de tip Bernoulii au forma generală

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^m$$

unde $p, q : E \longrightarrow \mathbf{R}$ sunt funcţii continue definite pe un interval E, iar m este un număr real diferit de 0 şi de 1. Când m este 0 sau 1, ecuaţia este liniară sau cu variabile separabile. Această ecuaţie diferenţială se transformă într-o ecuaţie liniară prin schimbarea de funcţie $z = y^{1-m}$.

Exemplul 7.23 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei $y' + \frac{1}{x}y = x^2y^2$.

Rezolvare: Ecuaţia este de tip Bernoulli, cu $m = 2$. Vom reduce ecuaţia aceasta la o ecuaţie liniară făcând schimbarea de funcţie $z = y^{-1}$. Derivînd, obţinem $z' = -y^{-2}y'$. Înmulţind ecuaţia dată cu $-y^{-2}$ obţinem $-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -x^2$. Făcând înlocuirile, obţinem $z' - \frac{1}{x}z = -x^2$. De aici deducem că

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\exp\left(\int -\frac{1}{x}dx\right)}\left[c + \int -x^2 \exp\left(\int -\frac{1}{x}dx\right)dx\right] = \\ &= x\left[c - \int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx\right] = x\left[c - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{x\left(2c - x^2\right)}{2}, \end{aligned}$$

unde c este o constantă. Deoarece $z = y^{-1}$ rezultă că $y = z^{-1}$, deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = \frac{2}{x\left(2c - x^2\right)}$$

Exemplul 7.24 Ecuaţia diferenţială a lui Darboux

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy + P(x,y)\,(xdy - ydx) = 0,$$

unde M şi N sunt funcţii omogene de gradul m, iar P este funcţie omogenă de gradul l, se poate reduce la o ecuaţie Bernoulli făcînd substituţia $y = zx$, unde z este noua funcţie necunoscută. Obţinem

$$M(x,zx)\,dx + N(x,zx)\,(xdz + zdx) + P(x,zx)\,x^2dz = 0,$$

sau

$$x^m M(1,z)\,dx + x^m N(1,z)\,(xdz + zdx) + x^{l+2}P(1,z)\,dz = 0,$$

sau

$$\left[M(1,z) + zN(1,z)\right]dx + \left[xN(1,z) + x^{l+2-m}P(1,z)\right]dz = 0$$

În această ecuaţie considerăm că x este funcţia necunoscută, iar z este variabila independentă. Dacă $M(1,a) + aN(1,a) = 0$, atunci funcţia constantă $z = a$, deci $y = ax$, este o soluţie singulară a ecuaţiei diferenţiale. În punctele unde $M(1,z) + zN(1,z)$ nu se anulează, împărţind cu $M(1,z) + zN(1,z)$, ajungem la ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli

$$\frac{dx}{dz} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}x = -\frac{x^{l+2-m}P(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}x^{l+2-m},$$

Integrînd această ecuaţie şi întorcîndu-ne la variabila y, găsim integrala generală.

Exemplul 7.25 Integraţi ecuaţia diferenţială

$$xdx + ydy + x^2(xdy - ydx) = 0$$

Făcînd substituţia $y = zx$, obţinem: $xdx + zx(xdz + zdx) + x^4dz = 0$. De aici deducem

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}x = -\frac{1}{1+z^2}x^3,$$

care este o ecuaţie de tip Bernoulli. Integrînd această ecuaţie, obţinem:

$$\frac{1}{x^2} = C\left(1+z^2\right) + \left(1+z^2\right)\arctan z + z$$

Revenind la y, obţinem integrala generală: $C(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy - 1 = 0$.

Ecuaţia diferenţială a lui Riccati. Ecuaţia diferenţială

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

unde $p, q, r : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, se numeşte ecuaţia diferenţială a lui Riccati. S-a constatat că această ecuaţie nu este rezolvabilă în toate cazurile prin metode elementare. Se arată uşor că dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei, $y = y_1(x)$, atunci rezolvarea ei se reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale Bernoulli. prin schimbarea de funcţie $z = y - y_1(x)$.

Exemplul 7.26 Determainaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' + 2xy^2 - y - \frac{x-1}{x^2} = 0$$

Rezolvare: Constatăm că ecuaţia dată este de tip Riccati. Într-adevăr ecuaţia are forma

$$y' = -2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}$$

Coeficienţii ecuaţiei sunt: $p(x) = -2x$, $q(x) = 1$ şi $r(x) = \frac{x-1}{x^2}$, definiţi pe un interval I care nu conţine pe 0. Vom considera $I = (0, \infty)$. Observăm că $y = y_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$, este soluţie a ecuaţiei date. Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei date, facem schimbarea de funcţie $z = y - y_1(x) = y - \frac{1}{x}$. Rezultă $y' = z' - \frac{1}{x^2}$. Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$z' - \frac{1}{x^2} = -2x\left[z + \frac{1}{x}\right]^2 + \left[z + \frac{1}{x}\right] + \frac{x-1}{x^2}$$

Făcând calculele, obţinem $z' = -2xz^2 - 3z$. Această ecuaţie Bernoulli se reduce la o ecuaţie liniară prin schimbarea de funcţie $u = z^{-1}$. Înmulţind cu z^{-2}, ecuaţia devine

$z^{-2} \cdot z' = -2x - 3 \cdot z^{-1}$. Avem $u' = -z^{-2} \cdot z'$. Înlocuind, obţinem $-u' = -2x - 3u$, adică $u' - 3u = 2x$. Soluţia generală a acestei ecuaţii liniare este

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\exp\left[\int -3dx\right]}\left(c + \int 2x \cdot \exp\left[\int -3dx\right] dx\right) = \\ &= \exp(3x) \cdot \left(c - \frac{2}{9}(3x+1)\exp(-3x)\right) = \\ &= c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1), \end{aligned}$$

unde c este o constantă oarecare. Rezultă

$$z = \frac{1}{c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = z + \frac{1}{x} = \frac{1}{c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1)} + \frac{1}{x}$$

Ecuaţia diferenţială a lui Lagrange. Ecuaţia diferenţială $y = xf(y') + g(y')$, unde $f, g : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) \neq x$, sunt funcţii de clasă C^1, se numeşte ecuaţia lui Lagrange. Rezolvarea ei se face astfel: 1) Înlocuind $y' = p$, obţinem

$$y = xf(p) + g(p)$$

2) Diferenţiind, obţinem

$$dy = f(p)\,dx + xf'(p)\,dp + g'(p)\,dp$$

3) Înlocuind $dy = y'dx = pdx$ şi ordonînd, obţinem

$$(f(p) - p)\,dx + [xf'(p) + g'(p)]\,dp = 0$$

Se verifică imediat că această ecuaţie diferenţială este liniară în necunoscuta x şi variabila independentă p. Rezolvînd-o, obţinem soluţia sub forma $x = \phi(p, c)$. Din relaţia $y = xf(p) + g(p)$, rezultă $y = \phi(p, c) f(p) + g(p)$. Soluţia generală este exprimată parametric prin

$$\begin{cases} x = & \phi(p, c) \\ y = & \phi(p, c) f(p) + g(p) \end{cases},$$

unde p este parametru, iar c este constantă arbitrară.

Ecuaţia diferenţială a lui Clairaut. Ecuaţia diferenţială a lui Clairaut este ecuaţia lui Lagrange în cazul $f(p) = p$, pentru orice $p \in E$. Deci forma ecuaţiei lui Clairaut este

$$y = xy' + g(y')$$

Aplicînd acelaşi procedeu ca la ecuaţia lui Lagrange, obţinem succesiv:

$$y = xp + g(p), \; dy = pdx + xdp + g'(p)\,dp, \; (x + g'(p))\,dp = 0$$

Dacă $dp = 0$, obţinem $p = c$, unde c este o constantă arbitrară. Deci $y' = c$, iar soluţia generală este

$$y = xc + g(c)$$

Dacă $x + g'(p) = 0$, avem $x = -g'(p)$ şi $y = -g'(p)\,p + g(p)$, adică se obţine soluţia exprimată parametric prin

$$\begin{cases} x = & -g'(p) \\ y = & -g'(p)\,p + g(p) \end{cases},$$

care este o soluţie singulară.

Exemplul 7.27 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei $y = 2xy' + y'^2$.
Rezolvare: Ecuaţia considerată este de tip Lagrange. Punem $y' = p$ şi obţinem

$$y = 2xp + p^2$$

Diferenţiind obţinem $pdx = 2pdx + 2xdp + 2pdp$, deci

$$pdx + (2x + 2p)\,dp = 0, \text{ sau } \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este $x = \frac{c}{p^2} - \frac{2}{3}p$, $p \in I \subset \mathbf{R}$, unde I este un interval care nu conţine pe 0, iar c este o constantă reală arbitrară. Din relaţia $y = 2xp + p^2$, deducem reprezentarea parametrică a soluţiei generale a ecuaţiei date:

$$\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} - \frac{2}{3}p \\ y = \frac{2c}{p} - \frac{1}{3}p^2 \end{cases}, p \in I,$$

unde c este o constantă reală arbitrară.

Exemplul 7.28 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

Rezolvare: Ecuaţia considerată este de tip Clairaut. Punem $y' = p$ şi obţinem $y = xp + \frac{1}{p}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $p \in I \subset \mathbf{R}$, I fiind un interval care nu conţine pe 0. Vom considera $I = (0, \infty)$. Diferenţiind, obţinem $pdx = pdx + xdp - \frac{1}{p^2}dp$, sau, ordonând,

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right) dp = 0$$

O posibilitate este $x = \frac{1}{p^2}$, din care deducem reprezentarea parametrică a soluţiei singulare:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} \\ y = \frac{2}{p} \end{cases}, \ p \in I$$

În acest caz putem obţine forma explicită a soluţiei singulare, eliminând parametrul p:

$$y = 2\sqrt{x}, \ x \in (0, \infty)$$

Altă posibilitate este $dp = 0$, din care deducem $p = c$, unde c este o constantă arbitrară. Soluţia generală a ecuaţiei considerate este $y = xc + \frac{1}{c}$, unde $c \in (0, \infty)$ este o constantă arbitrară.

Ecuaţii algebrice în y'. Considerăm un domeniu E din $\mathbf{R}^2$ şi funcţiile continue $a_i : E \longrightarrow \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq n$.

Notăm

$$P(x, y, t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x, y)\, t^{n-k}$$

Ecuaţia $P(x, y, y') = 0$ se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul întâi, de gradul n în raport cu y'. Pentru a găsi soluţii ale acestei ecuaţii procedăm astfel: determinăm mai întâi rădăcinile ecuaţiei algebrice

$$P(x, y, t) = 0; \ t \in \mathbf{C},$$

în care am înlocuit formal pe y' cu t, şi apoi rezolvăm fiecare ecuaţie diferenţială $y' = t(x, y)$, $t(x, y)$ fiind o rădăcină a ecuaţiei menţionate.

Exemplul 7.29 Rezolvaţi ecuaţia diferenţială $y'^2 - 2xy' + x^2 - y^2 = 0$.

Înlocuind $y' = t$, obţinem $t^2 - 2xt + x^2 - y^2 = 0$. Rezolvînd, obţinem $t_1 = x + y$ şi $t_2 = x - y$. Revenind la substituţie, avem:

$$y' = x + y,$$

cu soluţia generală $y = ce^x - x - 1$, şi

$$y' = x - y,$$

cu soluţia generală $y = ce^{-x} + x - 1$. Cele două soluţii generale se pot reprezenta sub forma

$$\left[(y + x + 1)\, e^{-x} - c\right]\left[(y - x + 1)\, e^{x} - c\right] = 0$$

7.1.4 Ecuaţia lui Pearson

Ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - c)\, y}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2},$$

unde c_0, c_1, c_2 şi c sunt constante, a fost considerată de K. Pearson în Statistica Matematică pentru a genera diferite funcţii de frecvenţă. Este evident că nu orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale este funcţie de frecvenţă, deoarece funcţiile de frecvenţă sunt pozitive şi mărginesc împreună cu axa Ox o arie egală cu 1. De aceea luăm soluţiile numai pe intervalele pe care acestea sunt pozitive, iar pe intervalele în care sunt negative completăm cu valoarea 0.

1) Pentru $c_1 = c_2 = 0$, $c_0 = -\sigma^2$ şi $c = m$ ecuaţia devine

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - m)\, y}{-\sigma^2}$$

Separînd variabilele şi integrînd, obţinem

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x - m}{\sigma^2} dx, \; \ln y = -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} + \ln C,$$

adică

$$y = Ce^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Punînd condiţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1,$$

rezultă $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, deci se obţine funcţia de frecvenţă

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

a distribuţiei normale $N(m, \sigma)$.

2) Curbele lui Pearson de tipul 1 se obţin când trinomul $c_0 + c_1x + c_2x^2$ are rădăcinile λ_1 şi λ_2 reale şi diferite. În acest caz soluţia ecuaţiei diferenţiale are forma

$$y = \alpha (x - \lambda_1)^{m_1} (\lambda_2 - x)^{m_2}, \ \lambda_1 < x < \lambda_2$$

Când $\lambda_1 = -\lambda$ şi $\lambda_2 = \lambda$, forma soluţiei este

$$y = \alpha \left(\lambda^2 - xd^2\right)^m, \ \ -\lambda < x < \lambda$$

şi corespunde curbelor lui Pearson de tipul 2.

3) Când $c_2 = 0$, soluţia are forma

$$y = \alpha (c_0 + c_1x)^m e^{-ax}, \ x > -\frac{c_0}{c_1}$$

şi conduce la curbele lui Pearson de tipul 3. Pentru $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $m = \frac{n}{2} - 1$ şi $a = \frac{1}{2}$, obţinem funcţia de frecvenţă

$$y = \alpha x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x > 0$$

Distribuţia cu această funcţie de frecvenţă se numeşte distribuţia χ^2 a lui Helmert-Pearson.

4) Când trinomul $c_0 + c_1x + c_2x^2$ are rădăcinile complexe, atunci soluţia ecuaţiei diferenţiale are forma

$$y = \alpha \left(c_0 + c_1x + c_2x^2\right)^m e^{n \, arctg \frac{c_1 + 2c_2x}{\sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}}}, \ x \in \mathbf{R}$$

şi conduce la curbele lui Pearson de tipul 4.

5) Când trinomul $c_0 + c_1x + c_2x^2$ are rădăcina dublă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci soluţia ecuaţiei diferenţiale are forma

$$y = \alpha (x - \lambda)^m e^{-\frac{n}{x-\lambda}}$$

şi conduce la curbele lui Pearson de tipul 5. v

7.1.5 Existenţa şi unicitatea soluţiilor

Fie x_0 şi y_0 două numere reale oarecare, a şi b două numere reale pozitive,

$$I = [x_0 - a, x_0 + a], \ J = [y_0 - b, y_0 + b], \ \Delta = I \times J,$$

iar $f : \Delta \to \mathbf{R}$, o funcţie dată.

Teorema 7.1.1 *Dacă f este continuă pe Δ, şi lipschitziană pe Δ în raport cu y, adică există o constantă pozitivă L astfel încât*

$$|f(x,y)-f(x,Y)| \leq L|y-Y|,\ (\forall)\ (x,y),(x,Y)\in\Delta,$$

atunci ecuaţia $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ *admite o soluţie unică pe intervalul* $I_0=[x_0-\delta,x_0+\delta]$, *unde* $\delta=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$ *şi* $M=\sup\{|f(x,y)|\ |\ (x,y)\in\Delta\}$, *care verifică condiţia iniţială* $y(x_0)=y_0$.

Condiţiile teoremei se îndeplinesc dacă f şi f'_y sunt continue pe Δ. Demonstraţia se face prin metoda aproximaţiilor succesive. Se arată mai întâi că problema Cauchy pusă este echivalentă cu determinarea unei funcţii continue $y: I \longrightarrow \mathbf{R}$, care să verifice egalitatea

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds,\ x\in I$$

Apoi se defineşte un şir de funcţii continue $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel:

$$\begin{aligned} y_0 &: I_0 \longrightarrow J,\ y_0(x)=y_0,\\ y_n &: I_0 \longrightarrow J,\ y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,ds,\ (\forall)\ x\in I_0,\ n\in\mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Se arată că şirul este uniform convergent pe I_0 către o funcţie $y: I_0 \longrightarrow J$, unica soluţie a ecuaţiei considerate pe I_0. Funcţia y_n se numeşte aproximarea de ordinul n a soluţiei.

Exemplul 7.30. Folosind metoda aproximaţiilor succesive, determinaţi aproximarea de ordinul 3 a soluţiei ecuaţiei diferenţiale $y'=x^2+y^2$, care verifică condiţia iniţială $y(0)=0$.

Rezolvare: Şirul de funcţii $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, care converge către soluţia problemei Cauchy menţionate, este definit de metoda aproximaţiilor succesive astfel:

$$\begin{cases} y_0(x)=0\\ y_n(x)=\int\limits_0^x \left[s^2+y_{n-1}^2(s)\right]ds,\ n\in\mathbf{N}^* \end{cases}$$

pentru orice $x\in I=[-\delta,\delta]$, δ fiind un număr suficient de mic încât şirul să fie uniform convergent pe I. Deci

$$\begin{cases} y_1(x)=\int\limits_0^x [s^2+0^2]\,ds=\dfrac{1}{3}x^3,\\ y_2(x)=\int\limits_0^x \left[s^2+\dfrac{1}{9}s^6\right]ds=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{63}x^7,\\ y_3(x)=\int\limits_0^x \left[s^2+\dfrac{1}{9}s^6+\dfrac{2}{189}s^{10}+\dfrac{1}{3969}s^{14}\right]ds=\\ =\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{63}x^7+\dfrac{2}{2079}x^{11}+\dfrac{1}{59535}x^{15} \end{cases}$$

Exemplul 7.31 Determinaţi soluţia problemei Cauchy $y' = x^2 + y$, $y(0) = 0$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

Rezolvare: Şirul de funcţii $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, care converge către soluţia problemei Cauchy menţionate, este definit de metoda aproximaţiilor succesive astfel:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_n(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + y_{n-1}(s)\right] ds, \ n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

pentru orice $x \in I = [-\delta, \delta]$, δ fiind un număr suficient de mic încât şirul să fie uniform convergent pe I. Deci

$$\begin{cases} y_1(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + 0\right] ds = \dfrac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \dfrac{1}{3}s^3\right] ds = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3\cdot 4}x^4 = 2!\left(\dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4\right), \\ y_3(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \dfrac{1}{3}s^3 + \dfrac{1}{3\cdot 4}s^4\right] ds = 2!\left(\dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5\right) \end{cases}$$

Presupunem că, pentru un $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, avem

$$y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}\right)$$

Deducem

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \int\limits_0^x \left[s^2 + 2!\left(\frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{4!}s^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}s^{n+2}\right)\right] ds = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2!\left(\frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+3)!}x^{n+3}\right) = \\ &= 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+3)!}x^{n+3}\right), \end{aligned}$$

ceea ce arată că formula

$$y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}\right)$$

este valabilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2} + \cdots\right) = \\ &= 2!\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = 2e^x - 2 - 2x - x^2 \end{aligned}$$

Deci soluţia problemei Cauchy considerate este $y = 2e^x - 2 - 2x - x^2$. Observăm că soluţia găsită este valabilă pentru $x \in \mathbf{R}$.

7.2 Zece exemple din fizică şi chimie

1) Într-un rezervor se află o cantitate A de substanţă dizolvată în B litri de apă. Apoi, în fiecare minut, în rezervor intră M litri de apă şi ies N litri de soluţie $(M > N)$. Găsiţi cantitatea de substanţă în funcţie de timp.

Rezolvare: Fie $x(t)$ masa substanţei din rezervor, iar $V(t)$ volumul soluţiei, în litri, la momentul t al procesului. Din ipoteză rezultă

$$V(t) = B + Mt - Nt,$$

t fiind măsurat în minute. Concentraţia soluţiei la momentul t este $\frac{x(t)}{V(t)}$. În intervalul $[t, t + \Delta t]$ avem

$$x(t + \Delta t) \simeq x(t) - \frac{x(t)}{V(t)} N\Delta t$$

Ordonînd convenabil, avem

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \simeq -\frac{x(t)}{V(t)} N$$

Trecînd la limită, pentru $\Delta t \to 0$, obţinem ecuaţia diferenţială a procesului:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{V(t)} N$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabilele separabile. Separînd variabilele, obţinem

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N}{B + (M - N)t} dt$$

Integrînd, obţinem

$$\ln|x| = -\frac{N}{M - N} \ln|B + (M - N)t| + \ln|C|,$$

din care deducem

$$x(t) = \frac{C}{[B + (M - N)t]^{\frac{N}{M-N}}}$$

Condiţia iniţială este $x(0) = A$. Deducem mai întâi $C = AB^{\frac{N}{M-N}}$, iar apoi

$$x(t) = A\left[\frac{B}{B + (M - N)t}\right]^{\frac{N}{M-N}}$$

2) Într-un rezervor se află 100 litri de soluţie care conţine 10 Kg de sare. În rezervor se aduce apă cu viteza de 5 litri / min şi se scoate soluţie cu aceeaşi viteză. Presupunem că omogenizarea soluţiei se face instantaneu. Câtă sare rămâne în rezervor după o oră?

Rezolvare: Suntem în cazul problemei precedente cu $A = 10$, $B = 100$, iar $M = N = 5$. Suntem conduşi la ecuaţia diferenţială $\frac{dx}{x} = -\frac{N}{B}dt$. Integrînd, obţinem $x(t) = Ae^{-\frac{N}{B}t}$. După o oră avem

$$x(60) = 10e^{-\frac{5}{100}60} = 10e^{-3} = 0,49787Kg \simeq 0,5Kg.$$

3) O substanţă A se transformă în altă substanţă cu o viteză proporţională cu masa de substanţă A netransformată. Dacă masa de substanţă A este de $31,4$ g după trecerea unei ore şi de $9,7$ g după trecerea a trei ore, atunci determinaţi:

a) Masa de substanţă la începutul procesului.

b) Peste cât timp de la începutul procesului rămâne doar 1% din masa iniţială de substanţă A.

Rezolvare: Dacă notăm cu $m(t)$ masa de substanţă A existentă la momentul t, atunci, pentru intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$, avem:

$$m(t + \Delta t) \simeq m(t) - km(t)\Delta t$$

Deducem

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \simeq -km(t)$$

Făcînd $\Delta t \to 0$, obţinem ecuaţia diferenţială a procesului:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabilele separabile. Integrînd, obţinem $m(t) = m(0)e^{-kt}$.

a) Exprimînd timpul în ore, condiţiile devin:

$$\begin{aligned} m(1) &= m(0)e^{-k} = 31,4 \\ m(3) &= m(0)e^{-3k} = 9,7 \end{aligned}$$

Împărţind egalităţile, obţinem $\frac{[m(0)]^3}{m(0)} = \frac{(31,4)^3}{9,7}$, din care deducem

$$m(0) = \sqrt{\frac{(31,4)^3}{9,7}} = 56,495g$$

Deducem şi

$$e^{-k} = \frac{31,4}{m(0)} = \frac{31,4}{56,495} = 0,5558$$

b) Condiţia se exprimă sub forma

$$\frac{1}{100}m(0) = m(0)\,e^{-kt} = m(0)\left(e^{-k}\right)^t = m(0)\,(0,5558)^t\,,$$

din care, simplificînd cu $m(0)$ şi logaritmînd, deducem $-\ln 100 = t\ln 0,5558$. Deci

$$t = \frac{-\ln 100}{\ln 0,5558} = 7,8406 \text{ ore}$$

4) Viteza de răcire a unui corp este proporţională cu diferenţa dintre temperatura corpului şi temperatura mediului înconjurător (coeficientul de proporţionalitate fiind $k > 0$). Găsiţi dependenţa de timp a temperaturii T a corpului dacă mediul se menţine la temperatura constantă a, iar $T(0) = T_0$.

Rezolvare: Ecuaţia procesului este

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T-a)\,,$$

cu condiţia iniţială $T(0) = T_0$. Ecuaţia, fiind cu variabile separabile, se integrează imediat şi obţinem soluţia

$$T(t) = a + (T_0 - a)\,e^{-kt}$$

5) Un corp se răceşte, într-un mediu cu temperatura constantă $a = 20^0\ C$, astfel încât după 10 minute temperatura scade de la $100^0\ C$ la $60^0\ C$. În cât timp temperatura corpului ajunge la $25^0\ C$?

Rezolvare: Ecuaţia diferenţială a procesului este, conform problemei precedente,

$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$

Măsurînd timpul în minute, condiţia dată devine

$$60 = 20 + 80e^{-10k}$$

Simplificînd calculele, obţinem $e^{-10k} = 0,5$. De aici deducem $e^{-k} = (0,5)^{0,1} = 0,93303$. Ecuaţia procesului devine

$$T(t) = 20 + 80\cdot(0,93303)^t$$

Condiţia $T(t) = 25$ ne conduce la $20 + 80\cdot(0,93303)^t = 25$. De aici deducem $(0,93303)^t = 1/16$, din care rezultă

$$t = \frac{\ln\frac{1}{16}}{\ln 0,93303} = 39,998 \simeq 40 \text{ minute}$$

6) S-a constatat experimental că viteza de dezintegrare a radiului este proporţională cu cantitatea sa (nedezintegrată). În decurs de un an, din fiecare gram de radiu se dezintegrează 0,44 miligrame. După câţi ani se dezintegrează jumătate din cantitatea iniţială?

Rezolvare: Ecuaţia procesului are forma $\frac{dm}{dt} = -km$, unde $k > 0$ este o constantă specifică radiului. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $m(t) = m(0)e^{-kt}$. Exprimînd timpul în ani şi masa în miligrame, condiţia dată devine

$$m(1) = 1000 - 0,44 = 1000e^{-k}$$

De aici deducem $e^{-k} = 999,56/1000 = 0,99956$. Ecuaţia procesului devine

$$m(t) = m(0)[0,99956]^t$$

Cerinţa problemei devine

$$\frac{m(0)}{2} = m(0)[0,99956]^t,$$

din care deducem $[0,99956]^t = 0,5$. Deducem

$$t = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,99956} \simeq 1575 \text{ ani}$$

7) Cantitatea de lumină care se pierde la trecerea unui fascicul printr-un strat de apă este proporţională cu cantitatea de lumină care cade pe strat şi cu grosimea stratului parcurs (constanta de proporţionalitate fiind $k > 0$). Cunoscînd că prin parcurgerea unui strat de apă gros de 2 metri se pierde 1/3 din fluxul iniţial, găsiţi ce parte se pierde când se străbate un strat de apă gros de 12 metri.

Rezolvare: Notăm cu $\phi(x)$ cantitatea de lumină care rămâne după ce fasciculul de lumină a parcurs un strat de apă de grosime egal cu x. În intervalul $[x, x + \Delta x]$ avem:

$$\phi(x + \Delta x) \simeq \phi(x) - k\phi(x)\Delta x,$$

din care deducem

$$\frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} \simeq -k\phi(x)$$

Trecînd la limită, pentru $\Delta x \longrightarrow 0$, obţinem ecuaţia diferenţială a procesului:

$$\frac{d\phi}{dx} = -k\phi,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia generală este

$$\phi(x) = \phi(0)e^{-kx}$$

Din ipoteză deducem $\phi(2) = \frac{2}{3}\phi(0)$, adică $\frac{2}{3}\phi(0) = \phi(0)e^{-2k}$. De aici rezultă $e^{-k} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165$. Soluţia capătă forma

$$\phi(x) = \phi(0)\,[0,8165]^x$$

Deducem $\phi(12) = \phi(0)\,[0,8165]^{12}$, iar

$$\frac{\phi(0) - \phi(12)}{\phi(0)} = 1 - [0,8165]^{12} = 91,22\%,$$

adică pierderea este de aproximativ 90%.

8) Viteza de scurgere a apei dintr-un vas printr-un orificiu este dată de formula obţinută experimental: $v = 0,6\cdot\sqrt{2gh}$, unde h este înălţimea nivelului apei faţă de orificiu, g este acceleraţia gravitaţională (se ia $g = 10m/s^2$). În cât timp se scurge apa dintr-un rezervor cilindric cu diametrul $2R = 1$ m şi înălţimea $H = 1,5$ m, printr-un orificiu aflat pe fundul rezervorului, avînd diametrul $2r = 0,05$ m.

Rezolvare: Notăm cu $x(t)$ înălţimea apei în rezervor la momentul t. Deoarece volumul de apă care se scurge din rezervor în unitatea de timp este $\pi r^2\cdot v$, rezultă că

$$\begin{aligned}\pi R^2\cdot x(t+\Delta t) &\simeq \pi R^2\cdot x(t) - \pi r^2\cdot 0,6\cdot\sqrt{2gx(t)}\cdot\Delta t, \text{ adică}\\ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &\simeq -\frac{r^2}{R^2}0,6\cdot\sqrt{2gx(t)}\end{aligned}$$

Am ţinut cont că volumul de apă din rezervor la momentul $t+\Delta t$ este egal cu volumul la momentul t minus volumul scurs în intervalul $[t, t+\Delta t]$. Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, obţinem ecuaţia diferenţială a procesului:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r^2}{R^2}0,6\cdot\sqrt{2gx(t)}$$

Separînd variabilele, avem

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\frac{r^2}{R^2}0,3\cdot\sqrt{2g}dt$$

Integrînd, obţinem

$$\sqrt{x(t)} = -\frac{r^2}{R^2}0,3\cdot\sqrt{2g}\cdot t + \sqrt{x(0)}$$

Ne interesează valoarea lui t pentru care $x(t) = 0$, adică

$$0 = -\frac{r^2}{R^2}0,3\cdot\sqrt{2g}\cdot t + \sqrt{x(0)},$$

din care deducem

$$t = \frac{\sqrt{x(0)}\cdot R^2}{0,3\cdot\sqrt{2g}\cdot r^2} = \frac{\sqrt{1,5}\cdot(0.5)^2}{(0.3)\cdot\sqrt{20}\cdot(0.025)^2} = 365,15 \simeq 6\,\text{min}\ \ 5\text{ s}$$

9) Un glonţ cu viteza de 400 m/s trece printr-un perete de grosime $h = 20$ cm şi continuă mişcarea cu viteza de 100 m/s. Considerînd că rezistenţa peretelui este proporţională cu pătratul vitezei glonţului, găsiţi timpul de trecere prin perete.

Rezolvare: Procesul este dirijat de ecuaţia

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

Condiţia iniţială este $v(0) = 400$. Separînd variabilele, avem $m\frac{dv}{v^2} = -kdt$. Integrînd, obţinem $-\frac{m}{v} = -kt + C$, unde C este o constantă arbitrară. Condiţia iniţială ne dă $C = -\frac{m}{400}$, deci soluţia devine $\frac{m}{v} = kt + \frac{m}{400}$, din care deducem

$$v(t) = \frac{m}{kt + \frac{m}{400}}$$

Notînd cu $x(t)$ spaţiul parcurs de glonţ de la momentul impactului cu peretele până la momentul t, avem

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \frac{m}{kt + \frac{m}{400}}$$

Integrînd, obţinem

$$x(t) = \frac{m}{k}\ln\left(kt + \frac{m}{400}\right) + C_1,$$

unde C_1 este o constantă arbitrară. Condiţia iniţială $x(0) = 0$, ne dă $C_1 = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{m}{400}\right)$, iar soluţia devine

$$x(t) = \frac{m}{k}\ln\frac{kt + \frac{m}{400}}{\frac{m}{400}} = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{400kt}{m} + 1\right)$$

Fie t_1 momentul cu proprietăţile: $x(t_1) = h$ şi $v(t_1) = 100$. Rezultă

$$\frac{m}{k}\ln\left(\frac{400kt_1}{m} + 1\right) = 0,2;\quad \frac{m}{kt_1 + \frac{m}{400}} = 100$$

Din ultima relaţie rezultă $\frac{400kt_1}{m} + 1 = 4$. Înlocuind în prima relaţie, obţinem $\frac{m}{k}\ln 4 = 0,2$. Revenind la $\frac{400kt_1}{m} + 1 = 4$, deducem $t_1 = \frac{3}{400}\cdot\frac{m}{k} = \frac{3}{400}\cdot\frac{0,2}{\ln 4} = 0,001082025$ secunde.

10) O substanţă trece din starea solidă în starea gazoasă cu o viteză proporţională cu aria expusă (constanta de proporţionalitate fiind $k > 0$). Să se studieze evoluţia razei unei bile din acea substanţă, dacă la momentul iniţial raza bilei era r_0.

Rezolvare: Fie $r(t)$ raza bilei aflate în stare solidă la momentul t şi ρ densitatea substanţei respective. Cantitatea de substanţă în stare solidă la momentul t este $\frac{4\pi}{3}r^3(t)\rho$, iar viteza de evaporare este $v(t) = 4\pi r^2(t)k$. În intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ avem

$$\frac{4\pi}{3}r^3(t+\Delta t)\rho \simeq \frac{4\pi}{3}r^3(t)\rho - v(t)\Delta t = \frac{4\pi}{3}r^3(t)\rho - 4\pi r^2(t)k\Delta t$$

Simplificînd calculele, obţinem

$$\frac{r^3(t+\Delta t) - r^3(t)}{\Delta t}\rho \simeq -3r^2(t)k$$

Trecînd la limită, obţinem

$$3r^2(t)\frac{dr(t)}{dt}\rho = -3r^2(t)k$$

Simplificînd, obţinem ecuaţia diferenţială a procesului:

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{k}{\rho}$$

Integrînd, obţinem soluţia $r(t) = -\frac{k}{\rho}t + r_0$.

7.3 Exerciţii propuse

1. Arătaţi că $y = \frac{1}{3} + Ce^{-3x}$ este soluţia generală a ecuaţiei $y' + 3y = 1$.

2. Arătaţi că $\left(y - \frac{1}{3}\right)e^{3x} = c$ reprezintă integrala generală a ecuaţiei $y' + 3y = 1$.

3. Să se arate că ecuaţia $y' = x + y$ are soluţia $y = ce^x - x - 1$, pentru orice constantă c. Să se determine soluţia care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde x_0 şi y_0 sunt numere reale.

4. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei Riccati cunoscînd o soluţie y_1 a ei:

   (a) $y' + 2xy^2 - y - \dfrac{x-1}{x^2} = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$;

   (b) $y' + y^2 - (\sin x + \cos x)y - 2\cos x = 0$, $y_1 = \sin x + \cos x$;

   (c) $y' - \frac{1}{3}y^2 - \dfrac{2}{3x^2} = 0$, $y_1 = \lambda x$, unde λ este o constantă;

5. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de forma $y' = f(x)$ şi să se traseze curbele lor integrale:

(a) $y' = \dfrac{1}{x}$,

(b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

(c) $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$,

(d) $y' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$;

6. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

(a) $y' = 2y$,

(b) $y' = 2\sqrt{y}$,

(c) $y' = y^2$,

(d) $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ şi să se traseze curbele lor integrale;

7. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

(a) $x\,(y^2 - 1)\,dx + y\,(x^2 - 1)\,dy = 0$,

(b) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$,

(c) $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$,

(d) $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}}$.

8. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

(a) $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$,

(b) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$,

(c) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{x}{y}$,

(d) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

9. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

(a) $y' - \dfrac{1 + 2x}{x + x^2}y = \dfrac{1 + 2x}{x + x^2}$;

(b) $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$;

(c) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x^3}{y^4}$;

(d) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$;

(e) $y' + xy = -\frac{x}{y}$;

(f) $y' - \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2} = 0$ ştiind că are soluţia $y_1 = -\frac{1}{x}$;

(g) $(x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$;

(h) $y = 2xy' + y'^2$,

(i) $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$.

10. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale cu variabile separabile:

(a) $x'\cos^2 t \cot x + \tan t \sin^2 x = 0$;

(b) $tx' = x + x^2$;

(c) $tx'x = 1 - t^2$;

11. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale omogene sau reductibile la acestea:

(a) $tx' = x - t$;

(b) $tx' = -(t + x)$;

(c) $t^2x' = x(t - x)$;

(d) $2txx' = t^2 + x^2$;

(e) $\left(2\sqrt{tx} - t\right)x' = -x$;

(f) $tx' = x + \sqrt{t^2 + x^2}$;

(g) $(4x^2 + 3tx + t^2)\,x' = -(x^2 + 3tx + 4t^2)$;

(h) $2txx' = 3x^2 - t^2$.

12. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare sau reductibile la acestea:

(a) $tx' = x + tx$;

(b) $tx' = -2x + t^4$;

(c) $tx' = -x + e^t$;

(d) $(x^2 - 3t^2)\,x' + 2tx = 0;$

(e) $tx' = -x - tx^2;$

(f) $2txx' = x^2 - t;$

(g) $(2t - t^2 x)\,x' = -x;$

(h) $tx' = -2x\,(1 - tx)\,.$

13. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale exacte sau reductibile prin metoda factorului integrant:

(a) $(t + 2x)\,x' + t + x = 0;$

(b) $2tx' + t^2 + 2x + 2t = 0;$

(c) $(3t^2 x - x^2)\,x' - t^2 + 3tx^2 - 2 = 0;$

(d) $(t^2 x + x^3 + t)\,x' - t^3 + tx^2 + x = 0;$

(e) $(x^2 - 3t^2)\,x' + 2tx = 0;$

(f) $2txx' - (t + x^2) = 0;$

(g) $tx' - x\,(1 + tx) = 0;$

(h) $t\,(x^3 + \ln t)\,x' + x = 0;$

14. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Lagrange sau Clairaut:

(a) $x = \frac{1}{2}tx' + x'^{\,3};$

(b) $x = x' + \sqrt{1 - x'^{\,2}};$

(c) $x = (1 + x')\,t + x'^{\,2};$

(d) $x = -\frac{1}{2}x'\,(2t + x')\,;$

(e) $x = tx' + x'^{\,2};$

(f) $x = tx' + x';$

(g) $x = tx' + \sqrt{1 + x'^{\,2}};$

(h) $x = tx' + \dfrac{1}{x'}.$

15. Determinaţi aproximările de ordinul 3 pentru următoarele probleme Cauchy:

(a) $y' = y,\ y\,(0) = 1;$

(b) $y' = x + \sin y;\ y(0) = \pi;$

(c) $y' = y^2;\ y(0) = 1;$

(d) $y' = y^2 + 1,\ y(0) = 0;$

(e) $y' = \dfrac{\sin xy}{x},\ y(1) = 0;$

(f) $y' = \dfrac{x}{1 + y^2},\ y(0) = 0.$

Capitolul 8

Sisteme diferenţiale de ordinul întâi

8.1 Noţiuni fundamentale şi exemple

Forma unui sistem diferenţial. Forma generală a unui sistem diferenţial de ordinul întâi, cu n funcţii necunoscute $(n \in \mathbf{N}^*)$, este

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases}, \tag{8.1}$$

în care $F_i : D \subset \mathbf{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, sunt funcţii date, astfel încât fiecare dintre variabilele $\dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}$ să apară efectiv în cel puţin una din relaţiile (8.1) şi fiecare dintre funcţiile F_i să depindă efectiv de cel puţin una dintre variabilele $\dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}$. Forma normală a unui sistem diferenţial de ordinul întâi este

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases},$$

în care $f_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, sunt funcţii date. Dacă funcţiile $f_1, \cdots, f_n$ nu depind de x, atunci sistemul se numeşte autonom.

Soluţie. Prin soluţie a unui sistem diferenţial se înţelege un set de funcţii $(y_1, \cdots, y_n)$, $y_i : I \longrightarrow$

$\mathbf{R}$, I fiind un interval, astfel încât:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1(x), \cdots, y_n(x), \dfrac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n(x)}{dx}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_n\left(x, y_1(x), \cdots, y_n(x), \dfrac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n(x)}{dx}\right) = 0 \end{cases}, \ (\forall)\ x \in I,$$

pentru sistemul (8.1), respectiv

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = f_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{cases}, \ (\forall)\ x \in I, \tag{8.2}$$

pentru sistemul normal.

Exemplul 8.1 Sistemul diferenţial

$$\begin{cases} x + y_1 y_2 + \dfrac{dy_1}{dx} y_3 - x^3 - 3x - 1 = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} + \dfrac{dy_3}{dx} + x y_1 - x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} - x y_3 + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dy_3}{dx} + 2x^2 - 5x = 0 \end{cases}$$

admite soluţia $(x, x^2, 2x+1)$, $x \in \mathbf{R}$, deoarece înlocuind y_1 cu x, y_2 cu x^2, y_3 cu $2x+1$ şi $\dfrac{dy_1}{dx} = 1$, $\dfrac{dy_2}{dx} = 2x$, $\dfrac{dy_3}{dx} = 2$ în sistem, se obţin egalităţi adevărate.

Observaţii. 1) Literele y_i desemnează funcţiile necunoscute ale sistemului diferenţial, iar litera x desemnează variabila independentă a acestor funcţii. În locul expresiei $\dfrac{dy_i}{dx}$ se foloseşte adesea expresia y_i'. Funcţiile necunoscute şi variabila independentă pot fi desemnate prin orice fel de simboluri, dacă nu se crează confuzii.

2) Determinarea soluţiilor unui sistem diferenţial este un proces numit rezolvarea (sau integrarea) sistemului diferenţial respectiv. Mulţimea de definiţie a soluţiei se determină, de regulă, odată cu soluţia.

3) Soluţia $(y_1, \cdots, y_n) : I \longrightarrow \mathbf{R}^n$ se poate indica sub forma

$$y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x), \ x \in I$$

Uneori această soluţie se indică sub forma $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $x \in I$.

Traiectorie. Fie $(y_1, \cdots, y_n)$ o soluţie pe un interval I a unui sistem diferenţial. Curba $\gamma \subset \mathbf{R}^n$, definită parametric prin

$$\gamma : \begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}, \ x \in I,$$

se numeşte traiectorie a acestui sistem diferenţial. Curba $\Gamma \subset \mathbf{R}^{n+1}$, definită prin

$$\Gamma = \{(x, y_1(x), \cdots, y_n(x) \mid x \in I\},$$

se numeşte curbă integrală a sistemului diferenţial.

8.1.1 Problema Cauchy

O problemă concretă importantă şi frecvent întâlnită este problema care constă în determinarea unei traiectorii (unei soluţii) a unui sistem diferenţial de ordinul întâi, care trece printr-un punct dat. Mai precis, problema Cauchy pentru un sistem diferenţial constă în determinarea unei soluţii a acestui sistem, $y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x),\ \ x \in I$, care să verifice condiţiile

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{8.3}$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_{10}, \cdots, y_{n0} \in \mathbf{R}$ sunt numere date. Condiţiile (8.3) se numesc condiţii iniţiale sau condiţii Cauchy.

8.1.2 Soluţii

Soluţie generală. Se numeşte soluţie generală a unui sistem diferenţial în mulţimea $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$, o mulţime S de soluţii ale acestui sistem cu proprietatea că pentru fiecare punct $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in E$ există o singură soluţie $(y_1, \ldots, y_n) \in S$, care să verifice condiţiile iniţiale: $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$.

Soluţie particulară. O soluţie a unui sistem diferenţial, care aparţine unei soluţii generale a acelui sistem se numeşte soluţie particulară.

Exemplul 8.2 Pentru sistemul diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 - y_2 = 0 \\ 3\dfrac{dy_2}{dx} - 3\dfrac{dy_1}{dx} + y_2 - 5y_1 = 0 \end{cases},$$

soluţia generală este $\{y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ y_2 = 2c_1 e^x - c_2 e^{-x}\},\ \ x \in \mathbf{R}$, unde c_1 şi c_2 sunt numere reale arbitrare. Luînd $c_1 = 2$ şi $c_2 = -5$, se obţine soluţia particulară: $y_1 = 2e^x - 5e^{-x},\ y_2 = 4e^x + 5e^{-x},\ x \in \mathbf{R}$.

Integrala unui sistem diferenţial. Un sistem de relaţii de forma

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = 0 \end{cases},$$

unde $G_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, este numit integrală (soluţie definită implicit) a unui sistem diferenţial, dacă el defineşte implicit pe $y_1, \cdots, y_n$ ca funcţii de x, pe o mulţime $I \subset \mathbf{R}$, şi setul $\{y_1, \cdots, y_n\}$ format din aceste funcţii este soluţie pe I a acelui sistem diferenţial. Prin integrală generală a sistemului (8.1) se înţelege un sistem de relaţii de forma

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = c_1 \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = c_n \end{cases}, \tag{8.4}$$

unde $G_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, cu proprietatea că pentru fiecare $(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}) \in E$, sistemul

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = G_1(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}) \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = G_n(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}) \end{cases},$$

defineşte implicit pe $y_1, \cdots, y_n$ ca funcţii de x, pe o vecinătate $I_0 \subset \mathbf{R}$ a lui x_0, iar setul $\{y_1, \cdots, y_n\}$ format din aceste funcţii este soluţia pe I_0 a sistemului diferenţial (8.1), care verifică condiţiile iniţiale $y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0}$.

Forma vectorială a unui sistem diferenţial. 1) Fie $F = (F_1, \cdots, F_n) : D \subset \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^n$ o funcţie vectorială cu componentele F_i, $1 \leq i \leq n$. Vom nota

$$y = (y_1, \cdots, y_n) \text{ şi } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}\right)$$

Considerăm că relaţia

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{8.5}$$

unde 0 este vectorul nul al spaţiului $\mathbf{R}^n$, este echivalentă cu sistemul diferenţial (8.1). Rezultă că un sistem diferenţial de ordinul întâi are forma unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, pe care o vom numi ecuaţie diferenţială vectorială de ordinul întâi.

2) Fie $f = (f_1, \cdots, f_n) : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, o funcţie vectorială cu componentele f_i, $1 \leq i \leq n$. Cu notaţiile de la punctul precedent deducem uşor că relaţia vectorială

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8.6}$$

este echivalentă cu sistemul diferenţial normal (8.2).

3) O soluţie a sistemului diferenţial (8.5), sau (8.6), de forma $y_1 = \phi_1(x), \cdots, y_n = \phi_n(x)$, $x \in I$, va fi reprezentată vectorial sub forma $y = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, $x \in I$.

4) Condiţiile iniţiale (8.3) se exprimă sub forma vectorială $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 = (y_{10}, \cdots, y_{n0}) \in \mathbf{R}^n$.

Observaţie. În cazul $n = 1$, sistemele diferenţiale de ordinul întâi devin ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Rezultatele obţinute în legătură cu soluţiile şi problema Cauchy pentru sisteme diferenţiale de ordinul întâi se transpun în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi.

8.1.3 Existenţa şi unicitatea soluţiilor

Cazul general. Fie x_0, $y_{10}, \cdots, y_{n0}$ numere reale date, $a, b_1, \cdots, b_n$ numere reale pozitive date,

$$\Delta = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_{10} - b_1, y_{10} + b_1] \times \cdots \times [y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n],$$

iar $f_i : \Delta \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le n$, funcţii date.

Teorema 8.1.1 *Dacă funcţiile $f_1, \cdots, f_n$ sunt continue pe Δ şi verifică condiţiile lui Lipschitz pe Δ, adică există numerele pozitive A_j, $1 \le j \le n$, astfel încât*

$$|f_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \le \sum_{j=1}^{n} A_j |Y_j - y_j|,$$

pentru $1 \le i \le n$, şi orice $(x, Y_1, \cdots, Y_n)$ şi $(x, y_1, \cdots, y_n)$ din Δ, atunci sistemul diferenţial (8.2) admite o soluţie unică pe intervalul $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, unde

$$h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \cdots, \frac{b_n}{M}\right\}, \; M = \max_{1\le i\le n} \sup_{(x,y_1,\cdots,y_n)\in\Delta} |f_i(x, y_1, \cdots, y_n)|,$$

care verifică condiţiile iniţiale (8.3).

Mai întâi se arată că problema Cauchy din enunţul teoremei se reduce la sistemul de ecuaţii integrale

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, \frac{dy_1(s)}{dx}, \cdots, \frac{dy_n(s)}{dx}\right) ds, \; 1 \le i \le n$$

Se construieşte o soluţie a acestui sistem folosind metoda aproximaţiilor succesive. Pentru aceasta se consideră nişte funcţii continue arbitrare $\alpha_i : I \to R$ astfel încât

$$(x, \alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \in \Delta, \; (\forall) \; x \in I,$$

numite aproximaţiile de ordinul 0 ale componentelor soluţiei $(y_1, \cdots, y_n)$ căutate. Aproximaţiile de ordinul p, $(p \in N^*)$, se definesc cu ajutorul aproximaţiilor de ordinul $p-1$ prin

$$y_i^p(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^{p-1}(s), \cdots, y_n^{p-1}(s)\right) ds, \; (\forall) \; x \in I, \; 1 \le i \le n$$

Se demonstrează că şirurile de funcţii $(y_1^p)_p, \cdots, (y_n^p)_p$ sunt uniform convergente pe I şi că

$$\left\{y_1 = \lim_{p\to\infty} y_1^p(x), \cdots, y_n = \lim_{p\to\infty} y_n^p(x)\right\}, \ x \in I,$$

este soluţia unică din enunţul teoremei, independentă de aproximaţiile de ordinul 0.

Cazul sistemelor liniare. Prin sistem diferenţial liniar cu n funcţii necunoscute se înţelege un sistem diferenţial de forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + l_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n + l_n(x) \end{cases}, \tag{8.7}$$

unde funcţiile $a_{ij} : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numesc coeficienţii sistemului, iar funcţiile $l_i : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numesc termenii liberi ai sistemului.

Observaţie. 1) Sistemul diferenţial liniar (8.7) este un caz particular al sistemului diferenţial normal (8.2), unde funcţiile f_i sunt definite pe $E = [a, b] \times \mathbf{R}^n$ şi sunt de forma

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = a_{i1}(x)\,y_1 + a_{i2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{in}(x)\,y_n + l_i(x)$$

2) Dacă toţi termenii liberi sunt identic nuli, atunci sistemul este numit omogen. În caz contrar, sistemul este numit neomogen.

3) Dacă toate funcţiile a_{ij} şi l_i sunt continue pe $[a, b]$, atunci toate funcţiile f_i sunt continue pe E.

4) Notînd $A = \max\limits_{1\le i,j\le n} \sup\limits_{x\in[a,b]} |a_{ij}(x)|$, rezultă

$$|f_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,[Y_j - y_j]\right| \le \sum_{j=1}^{n} A\,|Y_j - y_j|,$$

pentru orice $(x, Y_1, \cdots, Y_n)$, $(x, y_1, \cdots, y_n) \in E$ şi $1 \le i \le n$, adică se îndeplinesc condiţiile lui Lipschitz. În urma acestor observaţii, putem reformula teorema Cauchy-Lipschitz pentru sistemul liniar (8.7) astfel:

Teorema 8.1.2 *Dacă a_{ij} şi l_i sunt funcţii continue pe $[a, b]$, pentru orice $1 \le i, j \le n$, atunci, pentru orice $x_0 \in [a, b]$ şi pentru orice numere $y_{10}, \cdots, y_{n0}$, sistemul diferenţial liniar (8.7) admite o soluţie unică, $\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}$, $x \in [a, b]$, care verifică condiţiile iniţiale*

$$y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0} \tag{8.8}$$

8.1.4 Sisteme liniare omogene.

Considerăm sistemul diferenţial liniar omogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n \\ \quad\vdots & \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n \end{cases}, \tag{8.9}$$

în care coeficienţii sistemului sunt funcţiile continue $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbf{R}$, I fiind un interval de numere reale. Pentru scurtarea scrierii vom folosi scrierea matriceală a unui sistem diferenţial liniar. 1) Vom nota

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} : I \longrightarrow M_{n,1}[\mathbf{R}], \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix},$$

$$\int \alpha\beta y(x)\,dx = \begin{bmatrix} \int \alpha\beta y_1(x)\,dx \\ \vdots \\ \int \alpha\beta y_n(x)\,dx \end{bmatrix}$$

2) Matricea

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

este numită matricea coeficienţilor sistemului diferenţial considerat. Cu aceste notaţii, sistemul diferenţial liniar omogen se scrie sub forma ecuaţiei matriceale

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

sau, pe scurt,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,y \text{ sau } y' = A(x)\,y$$

O soluţie pe I a sistemului omogen, cu notaţiile de mai sus, va fi o funcţie de forma

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} : I \longrightarrow M_{n,1}[\mathbf{R}]$$

care verifică relaţia $\phi'(x) = A(x)\phi(x)$ pentru orice $x \in I$. Se spune că ϕ este soluţia de componente $\phi_1, \ldots, \phi_n$ şi va fi notată uneori prin $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Conform teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei sistemelor diferenţiale liniare, rezultă că pentru orice $x_0 \in I$ şi $y_0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$, există o soluţie unică a sistemului omogen considerat, $y = y(x)$, $x \in I$, care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. În particular, unica soluţie care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = 0$ este soluţia $y : I \longrightarrow M_{n,1}[\mathbf{R}]$, definită prin $y(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, numită soluţia nulă sau soluţia banală.

Teorema 8.1.3 *Mulţimea S_0, a soluţiilor pe I ale sistemului diferenţial omogen (8.9), este un spaţiu vectorial real $n-$dimensional.*

O bază a lui S_0 este mulţimea $\left\{z^{(1)}, \cdots, z^{(n)}\right\}$, unde

$$z^{(i)} = \begin{bmatrix} z_1^{(i)} \\ \vdots \\ z_n^{(i)} \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq n,$$

este soluţia sistemului omogen, care verifică condiţia iniţială $z^{(i)}(x_0) = E_i$, x_0 fiind un punct fixat din I, iar $E_i \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$ avînd toate componentele nule afară de componenta din linia i, care este egală cu 1. O soluţie oarecare $y \in S_0$, de componente $y_1, \ldots, y_n$, se reprezintă atunci sub forma $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x_0)\, z^{(i)}$.

Wronskian. Fie $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ o mulţime formată din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9), iar $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ componentele soluţiei $y^{(i)}$. Funcţia $W : I \longrightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

pentru orice $x \in I$, se numeşte wronskianul sistemului de soluţii $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$.

Teorema 8.1.4 *Dacă $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ este o mulţime formată din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9), iar x_0 este un număr oarecare din I, atunci are loc relaţia*

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z)\right)dz\right)$$

pentru orice $x \in I$.

Observaţie. Wronskianul unui set format din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9) poate fi numai în una din situaţiile: 1) nul în toate punctele intervalului I; 2) nenul în toate punctele intervalului I.

Sistem fundamental de soluţii. Un set ordonat format din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9), al cărui wronskian nu se anulează, se numeşte sistem (sau set) fundamental de soluţii. Dacă $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ este un sistem fundamental de soluţii, iar componentele soluţiei $y^{(i)}$ sunt $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$, atunci matricea

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} : I \to M_n[\mathbf{R}]$$

se numeşte matrice fundamentală de soluţii.

Teorema 8.1.5 *Dacă $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ este un set fundamental de soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9), atunci orice soluţie a acestui sistem diferenţial are forma*

$$y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare.

Observaţie. 1) Expresia $y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$, unde c_i sunt constante arbitrare, reprezintă soluţia generală a sistemului diferenţial (8.9).

2) Soluţia generală are forma $y = Y \cdot c$, adică

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

unde Y este o matrice fundamentală de soluţii, iar

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$$

8.1.5 Sisteme neomogene

Metoda variaţiei constantelor. Considerăm sistemul diferenţial liniar neomogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\, y_n + l_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\, y_n + l_n(x) \end{cases}, \tag{8.10}$$

unde coeficienţii sistemului sunt funcţiile continue $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbf{R}$, iar termenii liberi ai sistemului sunt funcţiile continue $l_i : I \longrightarrow \mathbf{R}$, I fiind un interval de numere reale. Notând cu l matricea-coloană de componente $l_1, \cdots, l_n$ şi folosind notaţiile de la punctul precedent, sistemul diferenţial liniar neomogen se scrie

$$y' = A(x)\, y + l(x)$$

Teorema 8.1.6 *Fie $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ un set fundamental de soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (8.9), unde soluţia $y^{(i)}$ are componentele $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$, iar funcţiile $c_i : I \longrightarrow \mathbf{R}$, pentru $1 \le i \le n$, verifică sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1^{(1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_1^{(n)}(x) = l_1(x) \\ \vdots \\ c_1'(x)\, y_n^{(1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n)}(x) = l_n(x) \end{cases} \tag{8.11}$$

pentru orice $x \in I$. În aceste condiţii, funcţia $y_{part} = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$, definită pe I, este soluţie a sistemului diferenţial neomogen (8.10).

Observaţie. 1) Soluţia y_{part} menţionată în teoremă este o soluţie particulară a sistemului neomogen. Această soluţie are aceeaşi formă ca soluţia sistemului omogen, $c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$, cu deosebirea că c_i nu sunt constante ci funcţii. Metoda menţionată în teoremă, pentru obţinerea unei soluţii particulare a sistemului neomogen, este numită metoda variaţiei constantelor.

2) Soluţia particulară y_{part} se poate scrie sub forma matriceală $y_{part}(x) = Y(x) \cdot c(x)$, unde

$$c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, sistemul (8.11) se poate scrie sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{bmatrix}$$

sau, cu notaţiile cunoscute, $Y(x) \cdot c'(x) = l(x)$. Deoarece determinantul matricei $Y(x)$ este nenul, fiind wronskianul unui sistem fundamental de soluţii, rezultă că $Y(x)$ este inversabilă şi $c'(x) = Y^{-1}(x)\, l(x)$, din care rezultă

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz,$$

unde $x_0 \in I$ este un număr fixat, iar $c(x_0) \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$ este arbitrar, şi deci

$$y_{part}(x) = Y(x) \cdot \left[c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz\right]$$

Deducem $y_{part}(x_0) = Y(x_0) \cdot c(x_0)$, din care rezultă $c(x_0) = Y^{-1}(x_0) \cdot y_{part}(x_0)$. Deci

$$y_{part}(x) = Y(x) \cdot \left[Y^{-1}(x_0) \cdot y_{part}(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz\right]$$

Soluţia generală. Fie y_{part} o soluţie particulară a sistemului diferenţial liniar neomogen (8.10). Mulţimea S, a soluţiilor sistemului diferenţial liniar neomogen (8.10), este mulţimea $\{y_h + y_{part} \mid y_h \in S_0\}$.

Observaţie. Forma oricărei soluţii a sistemului diferenţial liniar neomogen (8.10) este

$$y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)} + y_{part}$$

unde $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este un sistem fundamental de soluţii al sistemului omogen (8.9), $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare, iar y_{part} este o soluţie particulară a sistemului neomogen (8.10).

8.1.6 Sisteme diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Fie sistemul diferenţial liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \qquad\vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n \end{cases} \tag{8.12}$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Pentru aceste sisteme vom arăta cum se poate construi un sistem fundamental de soluţii.

Folosind notaţiile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ şi } y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$$

sistemul se scrie sub forma matriceală $y' = Ay$.

Observaţii. 1) Din teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme liniare rezultă că sistemul diferenţial $y' = Ay$ admite o soluţie unică definită pe toată mulţimea numerelor reale

$$y : \mathbf{R} \to \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}],$$

care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, pentru fiecare $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $y_0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$.

2) Notăm cu S_0 mulţimea soluţiilor sistemului $y' = Ay$. Deducem uşor că dacă $y \in S_0$ atunci $y' \in S_0$. De aici deducem că $S_0 \subset C^\infty(\mathbf{R})$ şi că dacă $y \in S_0$ atunci $y^{(k)} \in S_0$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

Teorema 8.1.7 *Dacă λ este o valoare proprie a matricei A, iar $v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$ este un vector propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ, atunci sistemul diferenţial (8.12) admite soluţia*

$$y = ve^{\lambda x}, x \in \mathbf{R}$$

Observaţii. 1) Dacă valorile proprii $r_1, \ldots, r_n$ ale matricei A sunt distincte, iar $v^1, \ldots, v^n$ sunt vectori proprii corespunzători, atunci setul de funcţii

$$y^1 = v^1 e^{r_1 x}, \ldots, y^n = v^n e^{r_n x}$$

este un sistem fundamental de soluţii al sistemului $y' = Ay$. În consecinţă, soluţia generală a sistemului diferenţial $y' = Ay$ este în acest caz

$$y = c_1 v^1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n v^n e^{r_n x}, \ x \in \mathbf{R},$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare.

2) Dacă matricea A are coeficienţii reali şi două dintre valorile proprii sunt complex-conjugate, atunci soluţiile complex-conjugate y^1 şi y^2, ale sistemului diferenţial, corespunzătoare acestor valori proprii, se pot înlocui cu două soluţii reale, $\tilde{y}^1 = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$ şi $\tilde{y}^2 = \frac{1}{2i}(y^1 - y^2)$, iar noul set de soluţii rămâne fundamental. Acest procedeu va fi folosit dacă într-o problemă concretă este nevoie numai de soluţii reale.

Teorema 8.1.8 *Dacă ecuaţia caracteristică a sistemului diferenţial (8.12) admite o rădăcină λ, multiplă de ordinul m, atunci acest sistem diferenţial admite soluţii de forma*

$$y = \left(P_1(x)\,e^{\lambda x}, P_2(x)\,e^{\lambda x}, \ldots, P_n(x)\,e^{\lambda x}\right),\ x \in \mathbf{R}$$

în care $P_i(x)$ sunt funcţii polinomiale de grad cel mult $m-1$ de forma

$$P_i(x) = c_1 P_{i,0}(x) + c_2 P_{i,1}(x) + \cdots + c_m P_{i,m-1}(x)$$

$c_1, \ldots, c_m$ fiind m constante arbitrare, $P_{ij}(x)$ fiind funcţii polinomiale de grad cel mult j şi

$$P_1(x) = 0, \ldots, P_n(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_m = 0$$

Observaţie. 1) Soluţia sistemului (8.12) este o combinaţie liniară a m soluţii liniar independente. Într-adevăr, ţinând cont de forma funcţiilor polinomiale $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, avem

$$y = (P_1(x), \ldots, P_n(x))\, e^{\lambda x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(P_{1,j-1}(x), \ldots, P_{n,j-1}(x)\right) e^{\lambda x} = \sum_{j=1}^{m} c_j y^{(j)},$$

unde am notat $y^{(j)} = \left(P_{1,j-1}(x), \ldots, P_{n,j-1}(x)\right) e^{\lambda x}$, pentru $1 \leq j \leq m$. Soluţia $y^{(j)}$ se obţine din soluţia y pentru $c_j = 1$ şi $c_i = 0$ pentru oricare $i \neq j$. Liniar-independenţa soluţiilor $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ rezultă imediat. Relaţia

$$c_1 y^{(1)} + \cdots + c_m y^{(m)} = 0$$

revine la $y = 0$, adică $\left(P_1(x), \ldots, P_n(x)\right) e^{\lambda x} = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. De aici rezultă

$$P_1(x) = 0, \ldots, P_n(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R},$$

din care deducem, ţinând cont de proprietăţile funcţiilor polinomiale $P_1, \ldots, P_n$, că $c_1 = 0, \cdots c_m = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. Deci, unei rădăcini multiple de ordinul m a ecuaţiei caracteristice îi corespund m soluţii liniar independente pentru sistemul diferenţial.

2) Determinarea practică a polinoamelor $P_1, \cdots, P_n$ se face prin metoda identificării coeficienţilor.

Exemplul 8.3 Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale, liniar şi omogen, cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{cases} y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3 \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \\ y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3 \end{cases}$$

Notând

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ şi } A=\begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

sistemul se scrie sub forma matriceală

$$y' = Ay$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -9-r & -12 & -5 \\ 5 & 6-r & 3 \\ 1 & 4 & 1-r \end{vmatrix} = (r+2)^2(2-r)=0;\ r\in \mathbf{C}$$

din care deducem că $r_1 = 2$ este rădăcină simplă şi $r_2 = -2$ este rădăcină dublă.

Pentru valoarea proprie simplă $r_1 = 2$ corespunde o soluţie a sistemului de forma $y = ve^{2x}$, unde v este un vector propriu de componente v_1, v_2 şi respectiv v_3, definit prin $Av = 2v$, sau $(A-2I)\,v = 0$. Deci

$$\begin{bmatrix} -11 & -12 & -5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deducem uşor o soluţie nenulă: $v_1 = -2$, $v_2 = 1$ şi $v_3 = 2$. Aşadar soluţia care corespunde valorii proprii simple $r_1 = 2$ este

$$y^{(1)}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{2x}$$

Pentru valoarea proprie $r_2 = -2$, dublă, corespunde o soluţie de forma

$$\tilde{y}=\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 x \\ \alpha_2+\beta_2 x \\ \alpha_3+\beta_3 x \end{bmatrix}e^{-2x}$$

unde α_i şi β_i, pentru $i = 1, 2, 3$, sunt numere ce urmează a fi determinate. Avem

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}e^{-2x}-2\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 x \\ \alpha_2+\beta_2 x \\ \alpha_3+\beta_3 x \end{bmatrix}e^{-2x}=$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x \\ \alpha_2 + \beta_2 x \\ \alpha_3 + \beta_3 x \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Deducem

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Din a doua ecuaţie deducem

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 & -5 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvînd, obţinem soluţia generală $\beta_1 = c_2$, $\beta_2 = -c_2$, $\beta_3 = c_2$.

Din prima ecuaţie deducem:

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 & -5 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

din care deducem soluţia generală: $\alpha_1 = c_3 - c_2$, $\alpha_2 = -c_3 + \frac{1}{2}c_2$ şi $\alpha_3 = c_3$, unde c_2 şi c_3 sunt constante arbitrare. Rezultă soluţia

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} c_3 + c_2(-1 + x) \\ -c_3 + c_2\left(\frac{1}{2} - x\right) \\ c_3 + c_2 x \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Pentru $c_2 = 1$ şi $c_3 = 0$, respectiv pentru $c_2 = 0$ şi $c_3 = 1$ rezultă două soluţii liniar independente

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 + x \\ \frac{1}{2} - x \\ x \end{bmatrix} e^{-2x}, \; y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Soluţia generală este

$$y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + c_3 y^{(3)}$$

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt constante arbitrare. În reprezentare scalară soluţia este

$$\begin{aligned} y_1 &= -2c_1 e^{2x} + c_2(-1+x)e^{-2x} + c_3 e^{-2x}, \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2\left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x} - c_3 x e^{-2x}, \\ y_3 &= 2c_1 e^{2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{-2x} \end{aligned}$$

Determinarea soluţiei generale. Presupunem că matricea A are valorile proprii $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de multiplicităţi algebrice $m_1, \cdots, m_p$. Aşadar $m_1 + \cdots + m_p = n$. Pentru fiecare valoare proprie λ_i vom deduce m_i soluţii liniar independente pentru sistemul diferenţial. În final dispunem de n soluţii, despre care se demonstrează uşor că sunt liniar independente. Deci dispunem de un sistem fundamental de soluţii. Conform teoriei generale a sistemelor liniare, deducem soluţia generală a sistemului omogen, ca o combinaţie liniară arbitrară a sistemului fundamental. Folosind sistemul fundamental, deducem o soluţie particulară a sistemului neomogen, indiferent de forma membrului perturbator. Adunînd cele două soluţii menţionate obţinem soluţia generală a sistemului neomogen.

O problemă mai deosebită este cazul când matricea sistemului are coeficienţii reali, dar se obţin valori proprii complexe. Deoarece aceste valori proprii vor fi două câte două conjugate rezultă, din cele arătate mai sus, că putem înlocui cele două soluţii complexe ale sistemului diferenţial, corespunzătoare celor două valori proprii, prin două soluţii reale ale sistemului respectiv. Setul de soluţii astfel obţinut este, de data aceasta, format din n soluţii reale liniar independente. Deci, se poate obţine un set fundamental format numai din soluţii reale.

Exemplul 8.4 Determinaţi soluţia sistemului

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 4y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= 3y_1 + 2y_2 \\ \frac{dy_3}{dx} &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

care verifică condiţiile $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = -6$, $y_3(0) = 23$.

Rezolvare: Matricea sistemului fiind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem valorile proprii: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Calculînd vectorii proprii corespunzători, obţinem:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sistemul fundamental de soluţii este format din soluţiile

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^x, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x}$$

Soluţia generală este $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$, unde C_1, C_2 şi C_3 sunt constante arbitrare, adică

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x}$$

În exprimare scalară, soluţia generală are forma

$$y_1 = 3C_1e^x + C_3e^{5x}, y_2 = -9C_1e^x + C_3e^{5x}, y_3 = 7C_1e^x + C_2e^{4x} + 5C_3e^{5x}$$

Condiţiile iniţiale ne conduc la sistemul

$$3C_1 + C_3 = 6, -9C_1 + C_3 = -6, 7C_1 + C_2 + 5C_3 = 23,$$

care are soluţia: $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 3$. Soluţia cerută a sistemului diferenţial este

$$y_1 = 3e^x + 3e^{5x}, y_2 = -9e^x + 3e^{5x}, y_3 = 7e^x + e^{4x} + 15e^{5x}$$

Exemplul 8.5 Determinaţi soluţia generală a sistemului diferenţial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Rezolvare: Matricea sistemului fiind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

Rezolvînd, obţinem valorile proprii $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Calculăm un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2 + i$. Pentru aceasta trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deducem imediat o soluţie

$$v = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soluţia corespunzătoare a sistemului diferenţial este

$$X = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t)$$

Pentru valoarea proprie conjugată, $\lambda = 2 - i$, vom obţine soluţia conjugată

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t - i \sin t)$$

Din aceste două soluţii complexe conjugate putem obţine două soluţii reale, care formează sistem fundamental de soluţii:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{X + \tilde{X}}{2} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^{2t}, \\ X_2 &= \frac{X - \tilde{X}}{2i} = \begin{pmatrix} \sin t - \cot t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

Soluţia generală va fi

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = \begin{pmatrix} (c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t \\ 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t \end{pmatrix} e^{2t},$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare. În exprimare scalară, soluţia generală este

$$\begin{aligned} x_1 &= [(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t]\, e^{2t} \\ x_2 &= [2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t]\, e^{2t} \end{aligned}$$

Exemplul 8.6 Determinaţi soluţia generală a sistemului diferenţial

$$y_1'(x) = 2y_1 - y_2,\ y_2'(x) = 4y_1 + 6y_2$$

Rezolvare: Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Rezolvînd această ecuaţie, obţinem rădăcinile: $\lambda_{1,2} = 4$. Acestei rădăcini duble îi corespunde o soluţie de forma

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^{4x}$$

unde a, b, c, d sunt parametri. Înlocuind în sistemul scris sub forma $Y' = AY$, obţinem

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} e^{4x} + 4 \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^{4x}$$

Simplificînd cu e^{4x} şi efectuînd produsul matricelor, obţinem

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2bx-c-dx \\ 4a+4bx+6c+6dx \end{pmatrix}$$

Identificînd coeficienţii, obţinem sistemul

$$b + 2a = -c,\ d - 2c = 4a,\ 2b = -d,\ -2d = 4b,$$

din care rezultă: $d = -2b$, $c = -2a - b$. Soluţia devine:

$$Y = \begin{pmatrix} a+bx \\ -2a-b-2bx \end{pmatrix} e^{4x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4x} + b \begin{pmatrix} x \\ -1-2x \end{pmatrix} e^{4x},$$

care este tocmai soluţia generală. În exprimare scalară, soluţia generală are forma

$$y_1 = (a+bx)\, e^{4x},\ y_2 = (-2a-b-2bx)\, e^{4x}$$

Exemplul 8.7 Determinaţi soluţia generală a sistemului diferenţial liniar neomogen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 6x_1 + x_2 + t\\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_2 + 1\end{aligned}$$

Rezolvare: Rezolvăm mai întâi sistemul omogen. Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică, obţinem valorile proprii: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Pentru aceste valori proprii obţinem vectorii proprii corespunzători:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului omogen este

$$X_h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t},$$

unde a şi b sunt constante arbitrare. Pentru sistemul neomogen căutăm o soluţie particulară X_p, de aceeaşi formă ca X_h, cu deosebirea că a şi b sunt funcţii de t, adică de forma

$$X_p = a(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Înlocuind în sistemul neomogen scris matriceal sub forma

$$X = AX + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

obţinem

$$a' \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + a \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + 7b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \left[a \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} \right] + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reducînd termenii asemenea, avem

$$a'\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

din care obţinem

$$\begin{aligned} -a'e^t + b'e^{7t} &= t \\ 5a'e^t + b'e^{7t} &= 1 \end{aligned}$$

Rezolvînd acest sistem, deducem $a' = \dfrac{1-t}{6}e^{-t}$, $b' = \dfrac{1+5t}{6}e^{-7t}$. Integrînd, obţinem

$$a = \frac{1}{6}te^{-t},\ b = -\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t}$$

Soluţia particulară a sistemului neomogen devine

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{1}{6}te^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t - \left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} = \\ &= \frac{1}{6}t\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -14t-2 \\ 35t-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluţia generală a sistemului este

$$X = X_h + X_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^t + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -14t-2 \\ 35t-2 \end{pmatrix}$$

Sub formă scalară soluţia sistemului este

$$x_1 = -ae^t + be^{7t} + \frac{1}{49}(-14t-2),\ x_2 = 5ae^t + be^{7t} + \frac{1}{49}(35t-2)$$

Exemplul 8.8 Determinaţi soluţia generală a sistemului diferenţial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= kz \\ \frac{dz}{dx} &= -ky \end{aligned}$$

Matricea sistemului este $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$, iar ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -\lambda & k \\ -k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k^2 = 0$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică, obţinem valorile proprii: $\lambda_1 = -ik$, $\lambda_2 = +ik$. Calculăm un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -ik$. Pentru aceasta trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{pmatrix} ik & k \\ -k & ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deducem imediat o soluţie, $v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Soluţia corespunzătoare a sistemului diferenţial este

$$U = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikx} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos kx - i \sin kx) = \begin{pmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos kx \\ -\sin kx \end{pmatrix}$$

Pentru valoarea proprie conjugată, $\lambda = ik$, vom obţine soluţia conjugată

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \cos kx \\ -\sin kx \end{pmatrix}$$

Din aceste două soluţii complexe conjugate putem obţine două soluţii reale, care formează sistem fundamental de soluţii:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U + \tilde{U}}{2} = \begin{pmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{pmatrix}, \\ U_2 &= \frac{U - \tilde{U}}{2i} = \begin{pmatrix} \cos kx \\ -\sin kx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluţia generală va fi

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 U_1 + c_2 U_2 = \begin{pmatrix} c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \\ c_1 \cos kx - c_2 \sin kx \end{pmatrix},$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare. În exprimare scalară, soluţia generală este

$$\begin{aligned} y &= c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \\ z &= c_1 \cos kx - c_2 \sin kx \end{aligned}$$

8.1.7 Interpretarea mecanică a sistemelor diferenţiale normale

Soluţia $x_1 = x_1(t), \cdots, x_n = x_n(t)$, $t \in I$, a sistemului

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

în care t este considerat timp, corespunde mişcării unui punct material în spaţiul $n-$ dimensional $\mathbf{R}^n$. Acest spaţiu se numeşte spaţiul fazelor, iar curba descrisă în el de punctul mobil $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ se numeşte traiectoria mişcării. Reprezentarea parametrică a acestei traiectorii este

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}, t \in I,$$

şi se mai numeşte reprezentarea parametrică a mişcării.

Exemplul 8.9 Găsiţi traiectoria sistemului diferenţial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x^2}{y} \\ \frac{dy}{dt} &= x, \end{aligned}$$

care trece prin punctul $M_0(2,3)$.

Rezolvare: Derivînd ecuaţia a doua şi ţinînd cont de prima ecuaţie, obţinem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{y} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ y\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 0, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\right) = 0, \end{aligned}$$

din care deducem

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = C,$$

C fiind o constantă. Această ecuaţie cu variabilele separabile ne conduce la

$$\frac{dy}{y} = Cdt$$

Integrînd, obţinem

$$y = De^{C\,t}$$

De aici deducem

$$x = \frac{dy}{dt} = CDe^{C\,t}$$

unde D este o constantă arbitrară. Aşadar soluţia generală a sistemului este

$$\begin{aligned} x &= CDe^{C\,t} \\ y &= De^{C\,t} \end{aligned}$$

Din aceste relaţii, eliminînd pe t, deducem că traiectoriile sistemului pot fi exprimate sub forma $x = Cy$, adică sunt linii drepte. Pentru traiectoria căutată trebuie ca $3 = 2C$, deci $C = \frac{2}{3}$. Traiectoria căutată este dreapta de ecuaţie $2y - 3x = 0$.

Exemplul 8.10 O substanţă A se descompune în două substanţe P şi Q. Viteza de formare a fiecăreia din ele este proporţională cu masa de substanţă A ne descompusă. Determinaţi masele x şi y din substanţele P şi respectiv Q la momentul t dacă după o oră de la începutul procesului descompunerea este $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, unde a este masa iniţială din substanţa A.

Rezolvare: În intervalul $[t, t + \Delta t]$ au loc relaţiile aproximative

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &\approx k_1 (a - x(t) - y(t)) \Delta t \\ y(t + \Delta t) - y(t) &\approx k_2 (a - x(t) - y(t)) \Delta t, \end{aligned}$$

unde k_1 şi k_2 sunt constante de proporţionalitate specifice procesului. Împărţind cu Δt şi trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale al procesului:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1 (a - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 (a - x - y) \end{aligned} \tag{8.13}$$

cu condiţiile $x(1) = \frac{a}{8}$, $y(1) = \frac{3a}{8}$. La momentul $t = 0$ avem $x(0) = y(0) = 0$. Adunînd ecuaţiile şi notînd $x + y = z$, obţinem ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$\frac{dz}{dt} = (k_1 + k_2)(a - z)$$

Deducem succesiv

$$\frac{dz}{z - a} = -(k_1 + k_2)\, dt,\ \ln(z - a) = -(k_1 + k_2) t + \ln C,\ z = Ce^{-(k_1+k_2)t} + a$$

Revenind la sistem, obţinem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -Ck_1 e^{-(k_1+k_2)t} \\ \frac{dy}{dt} &= -Ck_2 e^{-(k_1+k_2)t}, \end{aligned}$$

din care deducem imediat

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Ck_1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} + D \\ y(t) &= \frac{Ck_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} + a - D \end{aligned}$$

Din condiţiile $x(0) = y(0) = 0$, deducem

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{ak_1}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right) \\ y(t) &= \frac{ak_2}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right) \end{aligned}$$

Din condiţiile $x(1) = \frac{a}{8}$, $y(1) = \frac{3a}{8}$, deducem

$$\begin{aligned} \frac{a}{8} &= \frac{ak_1}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right) \\ \frac{3a}{8} &= \frac{ak_2}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right) \end{aligned}$$

Adunînd şi simplificînd cu a, obţinem $e^{-(k_1+k_2)} = 2^{-1}$, apoi $\frac{k_1}{k_1+k_2} = \frac{1}{4}$ şi $\frac{k_2}{k_1+k_2} = \frac{3}{4}$. Soluţia sistemului diferenţial devine

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{4}\left(1-2^{-t}\right) \\ y(t) &= \frac{3a}{4}\left(1-2^{-t}\right),\ t \geq 0 \end{aligned}$$

8.2 Exerciţii propuse

1. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Arătaţi că

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\left(\sqrt{2}+1\right)e^{\sqrt{2}x} + c_2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-\sqrt{2}x}, \\ y_2 &= c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

este o soluţie a sistemului, oricare ar fi constantele c_1 şi c_2. Pentru acest sistem, relaţiile

$$\begin{aligned} y_1 + \left(\sqrt{2}-1\right)y_2 &= 2\sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} \\ y_1 - \left(\sqrt{2}+1\right)y_2 &= -2\sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

reprezintă integrala generală.

2. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + x \\ y_2' = y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$$

are soluţia

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x\left(c_1\cos x - c_2\sin x\right) - \frac{x+1}{2} \\ y_2 &= e^x\left(c_1\sin x + c_2\cos x\right) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

oricare ar fi constantele c_1 şi c_2. Să se determine soluţia astfel încât $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, unde x_0, y_1^0 şi y_2^0 sunt numere date.

3. Să se integreze sistemul diferenţial

$$y' - 2y - z = 0,\ z' - y - 2z = 0,$$

cu condiţiile $y(0) = 1, z(0) = 1$ şi apoi $y(0) = 0, z(0) = 1$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

4. Determinaţi soluţia generală a sistemelor diferenţiale:

(a) $\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y}$;

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$;

(c) $\frac{dy}{dx} = -z$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}$;

(d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + xy$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{2y}{x^3} + \frac{z}{x}$;

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}$.

5. $\frac{dy}{dx} = \omega z$, $\frac{dz}{dx} = \omega y$.

6. Determinaţi sistemele fundamentale de soluţii pentru sistemul diferenţial liniar şi omogen:

$$\begin{cases} y_1' + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 = 0 \\ y_2' - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 = 0 \\ y_3' - y_1 - 4y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

7. Determinaţi soluţia generală pentru sistemele diferenţiale liniare de mai jos:

(a) $y' - y + z = \lambda e^{2x}$, $z' + 4y + 2z = \mu e^{2x}$;

(b) $y_1' + y_1 - y_2 = 4x + 1$, $y_2' - y_1 - y_2 = -2x^2 + 2x - 1$;

(c) $y_1' - 5y_1 - 4y_2 = 0$, $y_2' - 4y_1 - 5y_2 = 0$;

(d) $y_1' - 2y_1 + y_2 = 0$, $y_2' - y_1 - 2y_2$;

(e) $y_1' - 3y_1 + y_2 - y_3 = 0$, $y_2' + y_1 - 5y_2 + y_3 = 0$, $y_3' - y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$;

(f) $y_1' - y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $y_2' - 3y_1 - y_2 + 3y_3 = 0$, $y_3' + 4y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$.

(g) $y_1' - 4y_1 + y_2 = 0$, $y_2' - y_1 - 2y_2 = 0$.

(h) $y_1' - y_2 - y_3 = 0$, $y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0$, $y_3' - y_2 - y_3 = 0$.

(i) $y_1' + y_2 + 2y_3 = 0$, $y_2' - y_1 - y_2 = 0$, $5y_3' + 6y_1 - 8y_2 = 0$.

8. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare:

(a) $x_1' = x_1 + 2x_2$, $x_2' = 4x_1 + 3x_2$;

(b) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$;

(c) $x_1' = x_1 + 5x_2$, $x_2' = -x_1 - 3x_2$;

(d) $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 + x_2 + t$;

(e) $x_1' + 2x_1 + x_2 = \sin t$, $x_2' - 4x_1 - 2x_2 = \cos t$;

(f) $x_1' + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t$, $x_2' + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2$;

(g) $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_1$;

(h) $x_1' = x_2 + x_3$, $x_2' = x_3 + x_1$, $x_3' = x_1 + x_2$;

Capitolul 9

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

9.1 Noţiuni fundamentale şi exemple

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag{9.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}$ este o funcţie care depinde efectiv de $\frac{d^n y}{dx^n}$. Forma normală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \tag{9.2}$$

unde $f : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$. Prin soluţie a ecuaţiei diferenţiale (9.1), sau (9.2), se înţelege o funcţie de forma

$$\phi : I \rightarrow \mathbf{R},$$

unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, cu proprietatea

$$x \in I \Rightarrow F\left(x, \phi(x), \frac{d\phi}{dx}(x), \cdots, \frac{d^n \phi}{dx^n}(x)\right) = 0,$$

sau

$$x \in I \Rightarrow \frac{d^n \phi(x)}{dx^n} = f\left(x, \phi(x), \frac{d\phi(x)}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}\phi(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

Observaţie. Soluţia se indică uneori prin: " $y = \phi(x)$, $x \in I$ ". Pentru exprimarea unor proprietăţi în care intervin soluţii, uneori, prin abuz de limbaj, o soluţie se desemnează sub forma " $y(x)$ " înţelegând că este vorba de funcţia $x \longrightarrow y(x)$ şi nu de valoarea acestei funcţii în punctul x.

Exemplul 9.1 Pentru ecuaţia diferenţială de ordinul 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + xy - 2e^x = 0,$$

funcţia $y = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$, este o soluţie. Într-adevăr, făcând calculele rezultă

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^x) - x\frac{d}{dx}(xe^x) + x(xe^x) - 2e^x = 0,\ (\forall)\ x \in R$$

Curbă integrală. Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte curbă integrală a acelei ecuaţii diferenţiale.

9.1.1 Problema Cauchy

Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n constă în determinarea unei soluţii a acelei ecuaţii diferenţiale, $y = y(x)$, $x \in I$, care să verifice condiţiile

$$y(x_0) = y_0^0,\ \frac{dy}{dx}(x_0) = y_0^1,\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_0^{n-1}, \tag{9.3}$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1} \in \mathbf{R}$ sunt numere date. Condiţiile (9.3) se numesc condiţii iniţiale sau condiţii Cauchy. Această soluţie se notează prin $y = y\left(x; x_0; y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right)$.

9.1.2 Soluţii

Soluţia generală. Se numeşte soluţie generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, pe mulţimea $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$, o familie S de soluţii ale acelei ecuaţii diferenţiale cu proprietatea

$$\left(x_0, y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}\right) \in E \Rightarrow y\left(x; x_0; y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right) \in S$$

Soluţia generală se indică de obicei sub forma unei soluţii care depinde de n constante arbitrare:

$$y = \phi(x, c_1, \ldots c_n),\ x \in I_{c_1,\ldots,c_n} \subset \mathbf{R},\ (c_1, \ldots c_n) \in J \subset \mathbf{R}^n,$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sunt parametri. Această soluţie trebuie să aibă proprietatea: pentru orice punct $\left(x_0, y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right)$ din E există un set unic de numere $(c_{1\,0}, \ldots, c_{n\,0}) \in J$ astfel încât

$$y\left(x; x_0; y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right) = \phi(x, c_{1\,0}, \ldots, c_{n\,0}),\ x \in I_{c_{1\,0},\ldots,c_{n\,0}}$$

Soluţie particulară. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, care aparţine unei soluţii generale a acelei ecuaţii diferenţiale, se numeşte soluţie particulară.

Observaţie. O soluţie particulară se obţine din soluţia generală pentru valoari particulare ale parametrilor.

Soluţie singulară. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior, care nu este soluţie particulară, se numeşte soluţie singulară.

Integrală generală. O relaţie de forma

$$g(x,y)=0,\ (x,y)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2,$$

unde $g:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ este o funcţie dată, se numeşte integrală a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior, dacă această relaţie defineşte implicit pe y ca funcţie de x, pe un interval $I\subset\mathbf{R}$, şi această funcţie este soluţie pe I a acelei ecuaţii diferenţiale de ordin superior. Prin integrală generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n se înţelege un sistem de n relaţii de forma

$$\begin{cases} G_1\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_n \end{cases},\ G_i:E\subset\mathbf{R}^{n+1}\rightarrow\mathbf{R}, \tag{9.4}$$

cu următoarele proprietăţi: pentru fiecare punct $\left(x_0,y_0^0,y_0^1,\cdots,y_0^{n-1}\right)\in E$ sistemul

$$\begin{cases} G_1\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_{10} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_{n0} \end{cases},\ c_{i0}=G_i\left(x_0,y_0^0,y_0^1,\cdots,y_0^{n-1}\right)$$

defineşte implicit pe y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\cdots$, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ ca funcţii de x, pe o vecinătate I_0 a lui x_0 sub forma

$$y=\phi(x),\dfrac{dy}{dx}=\alpha_1(x),\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\alpha_{n-1}(x)$$

astfel încât $y=\phi(x)$, să fie soluţie pe I_0 a ecuaţiei diferenţiale considerate şi

$$\phi(x_0)=y_0^0,\phi'(x_0)=\alpha_1(x_0)=y_0^1,\cdots,\phi^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}(x_0)=y_0^{n-1}$$

9.1.3 Exemple

Ecuaţii de forma $y^{(n)}=f(x)$. Presupunem că $f:E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, este o funcţie continuă. Atunci, pentru orice $x_0\in E$ funcţia reală

$$\phi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt+P_{n-1}(x),\ (\forall)\,x\in E,$$

unde $P_{n-1}(x) = y_0^{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + y_0^1\frac{x-x_0}{1!} + y_0^0$, este soluţie şi verifică condiţiile iniţiale

$$\phi(x_0) = y_0^0,\ \phi'(x_0) = y_0^1, \cdots, \phi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

oricare ar fi numerele $y_0^0, y_1^0, \cdots, y_{n-1}^0$. Observăm că dacă $f(a) = 0$, pentru un număr a, atunci ecuaţia admite soluţia constantă $y = a$.

Exemplul 9.2 Ecuaţia diferenţială $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$, unde f este o funcţie continuă dată, are soluţia generală $x = \int_{t_0}^{t}(t-z)f(z)\,dz + C_1t + C_2$, unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

Exemplul 9.3 Ecuaţia diferenţială $y'' = 6x$ are soluţia generală $y = x^3 + C_1x + C_2$, C_1 şi C_2 fiind constante arbitrare.

Exemplul 9.4 Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale $y''(x) = a$, unde a este o constantă, care verifică condiţiile iniţiale $y(x_0) = y_0$ şi $y'(x_0) = y_0'$.

Rezolvare: După prima integrare, între x_0 şi x, deducem $y'(x) - y_0' = a(x - x_0)$, iar după a doua integrare deducem

$$y(x) = \frac{a}{2}(x - x_0)^2 + y_0'(x - x_0) + y_0$$

Ecuaţiile de forma $F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(k+p)}\right) = 0$, în care lipsec funcţia necunoscută şi derivatele sale până la ordinul $k-1$, se rezolvă prin schimbarea de funcţie $y^{(k)} = z$. Derivînd, obţinem imediat $y^{(k+1)} = z^{(1)}, \cdots, y^{(k+p)} = z^{(p)}$. Ecuaţia devine $F\left(x, z, z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}\right) = 0$. Deci avem de rezolvat o ecuaţie de ordin p, adică cu k unităţi mai mic. Legătura dintre cele două ecuaţii este următoarea: dacă $z = u(x)$ este soluţie pentru ecuaţia $F\left(x, z, z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}\right) = 0$, pe un interval I, iar $y = v(x)$ este soluţie pentru ecuaţia $y^{(k)} = u(x)$, pe acelaşi interval, atunci $y = v(x)$ este soluţie pentru ecuaţia dată.

Exemplul 9.5 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi

$$4y' + (y'')^2 = 4xy''$$

Punînd $y' = z$, obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul întâi $4z + (z')^2 = 4xz'$, sau $z = xz' + \frac{1}{4}(z')^2$, care este o ecuaţie Clairaut. Soluţia sa generală este $z = Cx + \frac{1}{4}C^2$. Revenind la substituţie, avem $y' = Cx + \frac{1}{4}C^2$, de unde deducem

$$y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{4}C^2x + C_2 = C_1x(x - C_1) + C_2,\ \left(C_1 = \frac{C}{2}\right),$$

cu C_1 şi C_2 constante arbitrare. Soluţiei singulare $z = x^2$ îi corespunde $y = \frac{x^3}{3} + C_3$.

Ecuaţiile de forma $F\left(x, \frac{y'}{y}, \cdots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$, omogene în y şi derivatele sale, se reduc la ecuaţii de ordinul $n-1$ prin substituţia $\frac{y'}{y} = z$.

Exemplul 9.6 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene în y, y' şi y'' :

$$xyy'' + x\left(y'\right)^2 - yy' = 0$$

Punînd $\frac{y'}{y} = z$, avem $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y\left(z^2 + z'\right)$. De aceea ecuaţia devine

$$xy^2\left(z^2 + z'\right) + xy^2z^2 - y^2z = 0$$

Împărţind cu xy^2, se ajunge la ecuaţia de tip Bernoulli

$$z' - \frac{1}{x}z = -2z^2$$

Rezolvînd această ecuaţie, obţinem soluţia $z = \frac{x}{x^2 + C_1}$. Înlocuind z cu $\frac{y'}{y}$, vom obţine $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}$. Integrînd încă o dată, obţinem $y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}$. Soluţia $y = C_3$ nu este inclusă în soluţia generală, deci este soluţie singulară.

Ecuaţiile de forma $F\left(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$, în care lipseşte variabila independentă, îşi reduc ordinul prin schimbarea de funcţie şi de variabilă $y' = z\left(y\right)$, în care z va fi noua funcţie necunoscută, iar y va fi noua variabilă independentă.

Exemplul 9.7 Determinaţi integrala generală a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(1 + y^2\right)yy'' = \left(3y^2 - 1\right)\left(y'\right)^2$$

Punînd $y' = z$ şi luînd pe y ca variabilă independentă, obţinem:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z, \ \left(1 + y^2\right)y\frac{dz}{dy}z = \left(3y^2 - 1\right)z^2$$

Simplificînd cu z, obţinem $\left(1 + y^2\right)y\frac{dz}{dy} = \left(3y^2 - 1\right)z$. Separînd variabilele, obţinem

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2 - 1}{\left(1 + y^2\right)y}dy$$

Integrînd, găsim: $\ln|z| = 2\ln(1+y^2) - \ln|y| + \ln|C_1|$, sau $\dfrac{zy}{(1+y^2)^2} = C_1$. Întorcîndu-ne la funcţia y, obţinem

$$\frac{y'y}{(1+y^2)^2} = C_1$$

Integrînd încă odată, găsim integrala generală $\frac{1}{1+y^2} = -2C_1x + C_2$. Când am împărţit cu z am pierdut soluţiile corespunzătoare lui $z = 0$, adică lui $y' = 0$. De aici deducem soluţiile singulare $y = C_3$, unde C_3 este constantă arbitrară.

Ecuaţii care pot fi parametrizate. Considerăm ecuaţia diferenţială

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0,$$

unde F este o funcţie dată, care nu poate fi explicitată în raport cu $y^{(n)}$, dar există două funcţii φ şi ψ astfel încât $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$, pentru orice t dintrun interval I. În acest caz notăm $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$ şi procedăm astfel:

$$\begin{aligned} dy^{(n-1)} &= y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt \Rightarrow y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 = \psi_1(t;C_1), \\ dy^{(n-2)} &= y^{(n-1)}dx = \psi_1(t;C_1)\varphi'(t)\,dt \Rightarrow y^{(n-2)} = \int \psi_1(t;C_1)\varphi'(t)\,dt + C_2 = \\ &= \psi_2(t;C_1;C_2), \end{aligned}$$

Continuînd procedeul, ajungem la: $y = \psi_n(t;C_1,C_2,\cdots,C_n)$, iar soluţia generală se reprezintă parametric sub forma

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi_n(t;C_1,C_2,\cdots,C_n) \end{aligned}$$

Exemplul 9.8 Ecuaţia diferenţială $e^{y''} + y'' = x$ se poate parametriza sub forma: $x = e^t + t$, $y'' = t$. Deducem succesiv:

$$\begin{aligned} dy' &= y''dx = t\left(e^t+1\right)dt \Rightarrow y' = \int t\left(e^t+1\right)dt = (t-1)e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1, \\ dy &= y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right]\left(e^t+1\right)dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \int \left[(t-1)e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right]\left(e^t+1\right)dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \\ &+ \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2 \end{aligned}$$

Soluţia generală are forma parametrică

$$
\begin{aligned}
x &= e^t + t \\
y &= \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2
\end{aligned}
$$

Integrale prime şi factori integranţi. Dacă există $\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ astfel încât

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right),$$

atunci soluţiile ecuaţiei diferenţiale $\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) - C_1 = 0$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

Funcţia $\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ este numită integrală primă a ecuaţiei $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$.

Uneori se poate determina un factor integrant, adică o funcţie $\mu\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right)$ astfel încât să existe $\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ cu proprietatea

$$\mu\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

Exemplul 9.9 Ecuaţia diferenţială

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1 + (y')^2} = 0$$

se poate scrie sub forma $\frac{d}{dx}\left[\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln\left(1 + (y')^2\right)\right] = 0$. De aici deducem

$$
\begin{aligned}
\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln\left(1 + (y')^2\right) &= \ln|C_1|, \text{ sau} \\
\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} &= C_1
\end{aligned}
$$

Ultima ecuaţie se poate scrie şi ea sub forma

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - C_1 x\right] = 0$$

Prin urmare $\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - C_1 x = C_2$. Integrînd această ecuaţie, obţinem relaţia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 R^2,$$

unde a, b şi R sunt constante arbitrare.

Exemplul 9.10 Determinaţi integrala generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y''y + 2y^2 (y')^2 + (y')^2 - \frac{2yy'}{x} = 0$$

Înmulţind cu $\mu = \dfrac{1}{yy'}$, obţinem

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0, \tag{9.5}$$

care se poate scrie sub forma

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|\right] = 0,$$

aşa că $\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x| = \ln|C_1|$, deci

$$e^{y^2} yy' - C_1 x^2 = 0$$

Ultima ecuaţie diferenţială se scrie

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3\right] = 0,$$

din care deducem integrala generală

$$\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3 = C_2$$

Când $yy' = 0$, rezultă $y = C_3$, C_3 fiind o constantă arbitrară. Această soluţie rezultă din integrala generală, deci nu este o soluţie singulară.

Exemplul 9.11 Ecuaţia lui Liouville,

$$y'' + f(x)\, y' + F(y)\,(y')^2 = 0,$$

unde f, şi F sunt funcţii date, devine, după înmulţirea cu $\mu = \dfrac{1}{y'}$,

$$\frac{y''}{y'} + f(x) + F(y)\, y' = \frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \int_{y_0}^{y} F(y)\, dy\right] = 0$$

Prin urmare $\ln|y'| + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \int_{y_0}^{y} F(y)\, dy = \ln|C_1|$. Putem scrie această relaţie sub forma

$$y' = C_1 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx - \int_{y_0}^{y} F(y)\, dy\right)$$

Integrînd încă odată, obţinem integrala generală a ecuaţiei Liouville:

$$\int_{y_0}^{y} \exp\left(\int_{y_0}^{y} F(y)\, dy\right) dy = C_1 \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx\right) dx + C_2$$

9.1.4 Ecuaţii diferenţiale liniare.

Prin ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n ($n \in \mathbf{N}^*$), se înţelege o ecuaţie diferenţială de forma

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = l(x)\,, \tag{9.6}$$

în care funcţiile $a_i : I = [a,b] \to \mathbf{R}$, $0 \le i \le n$, se numesc coeficienţii ecuaţiei, iar funcţia $l : I \to \mathbf{R}$ este numită termenul liber (sau perturbator) al ecuaţiei. Dacă $l(x) = 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci ecuaţia se numeşte omogenă. Ecuaţia se numeşte neomogenă dacă nu este omogenă.

Teorema 9.1.1 *Dacă coeficienţii a_i, $0 \le i \le n$, şi termenul liber l sunt funcţii continue pe intervalul $I = [a,b]$, iar $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci ecuaţia diferenţială liniară (9.6) admite soluţia unică $y = y\left(x; x_0; y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right)$, $x \in I$, pentru orice $x_0 \in I$ şi $y_0^0,\ y_0^1,\ \cdots, y_0^{n-1}$ din* $\mathbf{R}$.

Teorema 9.1.2 *Funcţia $L_n : C^n[a,b] \to C^0[a,b]$ definită prin*

$$L_n[y] = a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y \tag{9.7}$$

pentru orice $y \in C^n[a,b]$, este o transformare liniară.

Observaţie. Ecuaţia (9.6) se poate scrie sub forma $L_n[y] = l(x)$. Ecuaţia liniară omogenă are forma $L_n[y] = 0$.

Teorema 9.1.3 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene este un subspaţiu vectorial $n-$ dimensional al spaţiului vectorial $C^n[a,b]$.*

O bază a acestui subspaţiu este mulţimea $\{y_1, \cdots, y_n\}$, unde y_i este soluţia care verifică condiţiile iniţiale

$$y_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$$

Observaţie. Orice mulţime formată din n soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene formează o bază a spaţiului $ker(L_n)$. Aşadar, orice soluţie a ecuaţiei omogene este o combinaţie liniară a acestor n soluţii.

Wronskian. Fie I un interval real, $m \in \mathbf{N}^*$ şi $y_i \in C^{m-1}(I)$, $1 \le i \le m$. Prin wronskian al funcţiilor $y_1, \cdots, y_m$ se înţelege funcţia $W[y_1, \cdots, y_m] : I \to \mathbf{R}$, definită prin determinantul

$$W[y_1, \cdots, y_m](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix},\ (\forall)\ x \in I$$

Teorema 9.1.4 (Liouville) *Dacă $y_1, \cdots, y_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei omogene, atunci*

$$W[y_1, \cdots, y_n](x) = W[y_1, \cdots, y_n](x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right),$$

pentru orice $x, x_0 \in I$.

Teorema 9.1.5 *Soluţiile $y_1, \cdots, y_n$, ale ecuaţiei omogene (??), sunt liniar independente dacă şi numai dacă wronskianul $W[y_1, \cdots y_n]$ nu se anulează în I.*

Observaţie. Ţinând cont de teorema (9.1.4), teorema (9.1.5) se poate formula astfel: Soluţiile $y_1, \cdots, y_n$, ale ecuaţiei omogene sunt liniar independente dacă şi numai dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $W[y_1, \cdots y_n](x_0) \neq 0$.

Soluţia generală. Mulţimea $\{y_1, \cdots, y_n\}$, de soluţii ale ecuaţiei omogene, se numeşte sistem fundamental de soluţii dacă wronskianul $W[y_1, \cdots, y_n]$ nu se anulează în nici un punct din I.

Observaţii. 1) Pentru ca mulţimea $\{y_1, \cdots, y_n\}$,de soluţii ale ecuaţiei (??), să fie sistem fundamental de soluţii este necesar şi suficient ca wronskianul $W[y_1, \cdots, y_n]$ să nu se anuleze într-un punct din I.

2) Un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este o bază a spaţiului soluţiilor acelei ecuaţii.

Teorema 9.1.6 *Dacă $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene, atunci soluţia generală a acestei ecuaţiei este*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

unde c_i, pentru $1 \leq i \leq n$, sunt numere arbitrare.

Teorema 9.1.7 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (9.6) are forma $y = y_h + y_{part}$, unde y_h este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate, iar y_{part} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (9.6).*

Teorema 9.1.8 *Ecuaţia diferenţială liniară neomogenă (9.6) admite o soluţie particulară de forma*

$$y_{part} = c_1(x) y_1 + \cdots + c_n(x) y_n,$$

unde $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene asociate, iar funcţiile* $c_1(x), \cdots, c_n(x)$ *verifică sistemul*

$$\begin{cases} c_1' y_1(x) + \cdots + c_n' y_n(x) = 0 \\ c_1' y_1'(x) + \cdots + c_n' y_n'(x) = 0 \\ \\ c_1' y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{l(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{9.8}$$

Observaţii. 1) Soluţia particulară y_{part} a ecuaţiei neomogene, menţionată de teoremă, are aceeaşi formă ca soluţia generală a ecuaţiei omogene, şi anume $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, cu deosebirea că c_i, $1 \leq i \leq n$, sunt în acest caz funcţii, nu constante. Din acest motiv, metoda expusă în teoremă, prin care se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, este numită metoda variaţiei constantelor.

2) Sistemul (9.8) se rezolvă în două etape. În prima etapă sistemul (9.8) este considerat ca sistem algebric liniar cu necunoscutele c_i', $1 \leq i \leq n$. Sistemul este compatibil deoarece determinantul sistemului este nenul, fiind tocmai wronskianul sistemului fundamental de soluţii $\{y_1, \cdots, y_n\}$. Rezolvând sistemul obţinem soluţia $c_i' = \phi_i(x)$, pentru $1 \leq i \leq n$, unde $\phi_i : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, rezultate în urma unor operaţii algebrice cu funcţii continue, impuse de rezolvarea sistemului algebric. În etapa a doua se determină c_i ca primitivă particulară a funcţiei ϕ_i, $1 \leq i \leq n$.

9.1.5 Reducerea ordinului.

Teorema 9.1.9 *Dacă* $u, v \in C^n[a, b]$ *atunci*

$$L_n[uv] = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k u^{(j-k)} \right] v^{(k)}$$

Observaţii. 1) Dacă $u = e^{rx}$ atunci, deoarece $u^{(j-k)} = r^{j-k}e^{rx}$, are loc egalitatea

$$L_n[e^{rx}v] = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{K_n^{(k)}[r]}{k!} v^{(k)} \right] e^{rx}, \tag{9.9}$$

unde $K_n[r] = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} r^j = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$.

2) În particular, pentru $m \leq n$, avem

$$L_n[e^{rx}x^m] = \left[K_n[r] x^m + C_m^1 K_n^{(1)}[r] x^{m-1} + \cdots + C_m^m K_n^{(m)}[r] \right] e^{rx}$$

3) Dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene, adică are loc egalitatea $L_n[y_1] = 0$, atunci funcţia $y = y_1 v$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = l(x)$, dacă şi numai dacă v este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k y_1^{(j-k)}\right] v^{(k)} = l(x)$$

Notând $v^{(1)} = z$, ecuaţia de mai sus se transformă în ecuaţia de ordinul $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k y_1^{(j-k)}\right] z^{(k-1)} = l(x)$$

9.1.6 Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul doi.

Exemplul 9.12 Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

unde coeficienţii a_1 şi a_2 sunt funcţii continue pe un interval $[a, b]$. Să presupunem că y_1 este o soluţie a acestei ecuaţii, care nu se anulează în $[a, b]$. Făcând schimbarea $y = y_1(x) v$ deducem că y este soluţie a ecuaţiei considerate dacă şi numai dacă v este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$[a_1(x) y_1(x) + 2y_1'(x)] v' + y_1(x) v'' = 0$$

Notând $v' = z$, deducem ecuaţia diferenţială

$$z' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) z = 0$$

care admite soluţia

$$z = \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right], \ x \in [a, b]$$

unde x_0 este un număr oarecare din $[a, b]$. Revenind la $v' = z$ deducem o soluţie

$$v = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{[y_1(s)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a_1(t)\, dt\right] ds, \ x \in [a, b],$$

din care deducem soluţia

$$y_2 = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{[y_1(s)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a_1(t)\, dt\right] ds$$

independentă de y_1. Deducem că soluţia generală a ecuaţiei considerate este

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

unde c_1 şi c_2 sunt numere reale arbitrare.

Exemplul 9.13 Considerăm ecuaţia diferenţială liniară

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x),$$

unde p, q şi f sunt funcţii continue date, definite într-un interval $I = [a,b]$, şi un sistem fundamental de soluţii, $\{y_1, y_2\}$, al ecuaţiei omogene. Notăm

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},\ w(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix},\ K(x,t) = \frac{w(x,t)}{w(t)}$$

Deducem

$$w_x'(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, w_{xx}''(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}$$

şi $w(x,x) = 0$, $w_x'(x,x) = w(x)$. Dar

$$\begin{aligned} w_{xx}''(x,t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ -p(x)\,y_1'(x) - q(x)\,y_1(x) & -p(x)\,y_2'(x) - q(x)\,y_2(x) \end{vmatrix} = \\ &= -p(x)\,w_x'(x,t) - q(x)\,w(x,t) \end{aligned}$$

Vom arăta că

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\,f(t)\,dt$$

este soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Derivînd funcţia $z(x)$, obţinem:

$$\begin{aligned} z'(x) &= K(x,x)\,f(x) + \int_{x_0}^{x} K_x'(x,t)\,f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{w_x'(x,t)}{w(t)} f(t)\,dt, \\ z''(x) &= \frac{w_x'(x,x)}{w(x)} f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{w_{xx}''(x,t)}{w(t)} f(t)\,dt = f(x) - p(x)\,z'(x) - q(x)\,z(x) \end{aligned}$$

Deci $z''(x) + p(x)\,z'(x) + q(x)\,z(x) = f(x)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Concret, ecuaţia oscilatorului armonic $y'' + \omega^2 y = f(x)$, admite soluţia particulară

$$z(x) = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} \sin\omega(x-t)\,f(t)\,dt$$

Într-adevăr, un sistem fundamental de soluţii este format din $y_1 = \cos\omega x$ şi $y_2 = \sin\omega x$. Deducem

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix} = \omega,$$

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ \cos\omega x & \sin\omega x \end{vmatrix} = \sin\omega(x-t), \\ K(x,t) &= \frac{\sin\omega(x-t)}{\omega},\ z(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t) f(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} \sin\omega(x-t) f(t)\,dt \end{aligned}$$

Exemplul 9.14 Ecuaţia $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, se poate scrie sub forma

$$\left[\frac{d}{dx} - a\right]\left[\frac{dy}{dx} - by\right] = 0,$$

dacă există a şi b astfel încât $a + b = -p$, $ab - b' = q$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} - a\right]\left[\frac{dy}{dx} - by\right] &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{d}{dx}(by) - a\frac{dy}{dx} + aby = \\ &= \frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + (-b' + ab)y = \\ &= \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy \end{aligned}$$

Rezolvarea ecuaţiei se face astfel:

a) Rezolvăm ecuaţia $\dfrac{dz}{dx} - az = 0$. Obţinem imediat $z = Ce^{A(x)}$, unde $A(x) = \int a(x)\,dx$.

b) Rezolvăm ecuaţia $\dfrac{dy}{dx} - by = z$, cu z determinat mai sus. Obţinem

$$y = \left[C_1 + C\int e^{A(x)-B(x)}dx\right]e^{B(x)},$$

unde $B(x) = \int b(x)\,dx$.

Dacă p, şi q sunt constante, atunci a şi b pot fi alese soluţiile zerourile trinomului $r^2 + pr + q$. În acest caz

$$A(x) = ax,\ B(x) = bx,$$

Dacă $a \neq b$, atunci soluţia generală este

$$y = \left[C_1 + C\int e^{(a-b)x}dx\right]e^{bx} = C_1e^{bx} + \frac{C}{a-b}e^{ax}$$

Dacă $a = b$, atunci soluţia generală este

$$y = \left[C_1 + C\int e^{0x}dx\right]e^{bx} = [C_1 + Cx]\,e^{bx}$$

9.1.7 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Sistemul fundamental de soluţii. Considerăm ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{9.10}$$

unde coeficienţii a_i sunt constante reale. În acest caz, coeficienţii ecuaţiei fiind funcţii constante definite pe $\mathbf{R}$, soluţiile ecuaţiei vor fi definite pe $\mathbf{R}$. Pentru acest tip de ecuaţii diferenţiale vom indica un mod de a determina un sistem fundamental de soluţii.

Fie $L_n : C^n[a,b] \to C^0[a,b]$ funcţia definită prin

$$L_n[y]=a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny$$

pentru orice $y\in C^n[a,b]$.

Teorema 9.1.10 *Au loc egalităţile*

$$\begin{aligned} L_n[e^{rx}] &= e^{rx}K_n[r], \\ L_n\left[x^ke^{rx}\right] &= \left(C_k^0r^kK_n[r]+C_k^1r^{k-1}K_n^{(1)}[r]+\cdots+C_k^kK_n^{(k)}[r]\right)e^{rx}, \end{aligned}$$

unde

$$K_n[r]=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n,$$

pentru orice $k\in\mathbf{N}^*$, $x\in\mathbf{R}$ *şi* $r\in\mathbf{C}$.

Observaţii. 1)Funcţia polinomială $K_n[r]$ se numeşte polinomul caracteristic al ecuaţiei (9.10).

2)Ecuaţia $K_n[r]=0;\ r\in\mathbf{C}$, se numeşte ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (9.10), iar rădăcinile ecuaţiei caracteristice se numesc rădăcini caracteristice.

3)Dacă r_0 este o rădăcină caracteristică atunci $y=e^{r_0x}$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (9.10). Dacă rădăcina caracteristică r_0 este multiplă de ordinul m, adică anulează polinomul caracteristic şi derivatele sale până la ordinul $m-1$, deci

$$K_n[r_0]=K_n'[r_0]=\cdots=K_n^{(m-1)}[r_0]=0,$$

atunci

$$y_1=e^{r_0x},\ y_2=xe^{r_0x},\ \ldots,\ y_m=x^{m-1}e^{r_0x}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (9.10).

Teorema 9.1.11 *Dacă ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (9.10) are rădăcinile distincte $r_1, \cdots, r_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, \cdots, m_p$ şi $m_1 + \cdots + m_p = n$, atunci ecuaţia diferenţială (9.10) admite sistemul fundamental de soluţii*

$$\begin{array}{llll} e^{r_1 x}, & xe^{r_1 x}, & \cdots, & x^{m_1-1}e^{r_1 x} \\ e^{r_2 x}, & xe^{r_2 x}, & \cdots, & x^{m_2-1}e^{r_2 x} \\ \vdots & & & \\ e^{r_p x}, & xe^{r_p x}, & \cdots, & x^{m_p-1}e^{r_p x} \end{array}$$

Teorema 9.1.12 *Dacă $\{y_1, \ldots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (9.10), iar*

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \end{aligned}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$, atunci $\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\}$ este sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (9.10) dacă şi numai dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Teorema 9.1.13 *Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$ sunt două rădăcini complexe conjugate ale ecuaţiei caracteristice ale ecuaţiei diferenţiale (9.10), cu ordinele de multiplicitate $m_1 = m_2 = m$, atunci, în sistemul fundamental de soluţii dat de teorema (9.1.11), putem înlocui soluţiile complexe*

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x},\ xe^{r_2 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{r_2 x}$$

cu soluţiile reale

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

şi setul astfel obţinut este deasemenea sistem fundamental de soluţii.

9.1.8 Ecuaţia neomogenă cu termenul liber cvasipolinom

Putem determina soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, neomogene, pornind de la sistemul fundamental de soluţii indicat de teorema (9.1.11) şi folosind metoda variaţiei constantelor pentru obţinerea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene. Vom indica o altă metodă de găsire a unei soluţii particulare în cazul când termenul perturbator este un cvasipolinom.

Teorema 9.1.14 *Considerăm ecuaţia diferenţială liniară, cu coeficienţi constanţi reali, neomogenă*

$$L_n[y] = l(x)$$

în care termenul perturbator este cvasipolinomul

$$l(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x],$$

unde α şi β sunt numere reale, iar $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali. În aceste condiţii ecuaţia considerată admite o soluţie particulară de forma

$$y_p = x^\rho e^{\alpha x}\left[\tilde{P}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}(x)\sin\beta x\right]$$

unde $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ sunt funcţii polinomiale astfel încât

$$\deg\tilde{P}(x) = \deg\tilde{Q}(x) = \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\},$$

iar ρ este un număr natural, numit indice de rezonanţă, definit astfel: $\rho = 0$ dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină caracteristică, şi $\rho = m$ dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină caracteristică, multiplă de ordinul m.

Observaţie. Practic se procedează astfel: 1) Se determină elementele definitorii ale cvasipolinomului $l(x)$: α, β, P şi Q.

2) Se verifică dacă numărul $\alpha + i\beta$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, determinându-se indicele de rezonanţă ρ.

3) Se compune forma soluţiei particulare, ca în teoremă:

$$y_p = x^\rho e^{\alpha x}\left[\tilde{P}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}(x)\sin\beta x\right],$$

unde funcţiile polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ au coeficienţii nedeterminaţi.

4) Se calculează derivatele până la ordinul n ale lui y_p şi se compune identitatea

$$L_n[y_p] = l(x)$$

Ţinând cont că un set de funcţii de forma

$$\left\{1, x, x^2, \cdots, e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \cdots\right\}$$

este liniar independent, se identifică coeficienţii şi se obţine un sistem algebric din care se determină coeficienţii funcţiilor polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$.

Exemplul 9.15 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = (x+1)\, e^{3x}$$

Rezolvare: Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Rezolvînd, obţinem rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm 2$. Acestor rădăcini le corespunde sistemul fundamental de soluţii

$$e^{-x},\ e^{x},\ e^{-2x},\ e^{2x},$$

prin urmare soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x},$$

unde c_1, c_2, c_3 şi c_4 sunt constante arbitrare. Determinăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Deoarece termenul liber al ecuaţiei este cvasipolinomul

$$(x+1)\, e^{3x} = e^{\alpha x} \left[P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x\right],$$

deducem $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $P(x) = x + 1$, $Q(x) = 1$. Numărul $\alpha \pm i\beta = 3$ nu este rădăcină caracteristică, prin urmare ecuaţia neomogenă admite soluţie de forma

$$y_p = e^{3x} \left[(Ax + B) \cos 0x + (Cx + D) \sin 0x\right] = (Ax + B)\, e^{3x}$$

Calculînd derivatele lui y_p, înlocuindu-le în ecuaţia neomogenă, simplificînd cu e^{3x} şi identificînd coeficienţii, obţinem un sistem din care deducem $A = \dfrac{1}{40}$ şi $B = -\dfrac{38}{1600}$. Aşadar soluţia particulară devine

$$y_p = \frac{1}{1600}(40x - 38),$$

iar soluţia generală este

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x} + \frac{1}{1600}(40x - 38)$$

Exemplul 9.16 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y''' - 2y'' - 9y' + 18y = 18x^2 + 18x + 14$$

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene este $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$. Rezolvînd, obţinem rădăcinile caracteristice: $\lambda_{1,2} = \pm 3$, $\lambda_3 = 2$. Sistemul fundamental de soluţii este

$$e^{-3x},\ e^{3x},\ e^{2x},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{2x},$$

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt constante arbitrare. Termenul liber al ecuaţiei este cvasipolinomul

$$18x^2 + 18x + 14 = e^{0x}\left[\left(18x^2 + 18x + 14\right)\cos 0x + 1 \sin 0x\right],$$

care are parametri $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(x) = 18x^2 + 18x + 14$ şi $Q(x) = 1$. Deoarece numărul $\alpha \pm i\beta = 0$ nu este rădăcină caracteristică, rezultă că ecuaţia neomogenă admite soluţie particulară de aceeaşi formă cu termenul liber:

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

Derivînd şi înlocuind în ecuaţia neomogenă, obţinem

$$-4a - 9(2ax + b) + 18\left(ax^2 + bx + c\right) = 18x^2 + 18x + 14$$

Identificînd coeficienţii, obţinem: $18a = 18$, $18b - 18a = 18$, $18c - 9b - 4a = 14$. Rezolvînd, obţinem: $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$. Aşadar soluţia particulară devine $y_p = x^2 + 2x + 2$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{2x} + x^2 + 2x + 2$$

Exemplul 9.17 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - 5y' + 4y = 3e^x + 34 \sin x$$

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, iar rădăcinile caracteristice sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{4x},$$

c_1 şi c_2 fiind constante arbitrare. Vom determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că termenul liber nu este cvasipolinom, dar este suma a două cvasipolinoame: $f_1(x) = 3e^x$ şi $f_2(x) = 34 \sin x$. Notăm $L[y] = y'' - 5y' + 4y$. Determinînd soluţiile particulare y_{p1} şi y_{p2} astfel încât $L[y_{p1}] = f_1$ şi $L[y_{p2}] = f_2$, funcţia $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ va fi soluţie particulară a ecuaţiei date. Într-adevăr,

$$L[y_p] = L[y_{p1}] + L[y_{p2}] = f_1 + f_2 = 3e^x + 34 \sin x$$

Comparînd cu forma generală a unui cvasipolinom, deducem că parametri lui f_1 sunt $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $P_1 = 3$ şi $Q_1 = 1$, iar parametri lui f_2 sunt $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $P = 0$ şi $Q = 1$.

Deoarece $\alpha_1 + i\beta_1 = 1$ este rădăcină caracteristică multiplă de ordinul 1, ecuaţia $L[y] = f_1$ admite soluţie particulară de forma $y_{p1} = xe^x A$. Înlocuind în ecuaţie şi făcînd toate simplificările, obţinem $A = -1$. Deci $y_{p1} = -xe^x$.

Deoarece $\alpha_2 + i\beta_2 = i$ nu este rădăcină caracteristică, rezultă că ecuaţia $L[y] = f_2$ admite o soluţie particulară de forma $y_{p2} = a\cos x + b\sin x$. Înlocuind în ecuaţie şi făcînd toate simplificările, obţinem $a = 5$ şi $b = 3$. Deci $y_{p2} = 5\cos x + 3\sin x$. Aşadar o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene este $y_p = -xe^x + 5\cos x + 3\sin x$, iar soluţia generală este

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - xe^x + 5\cos x + 3\sin x$$

Exemplul 9.18 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

unde $\omega > 0$, iar $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă.

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, iar rădăcinile caracteristice sunt $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Sistemul fundamental de soluţii este: $\{\cos\omega x, \sin\omega x\}$, iar soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x,$$

unde c_1 şi c_1 sunt constante arbitrare. Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene vom folosi metoda variaţiei constantelor. Vom căuta soluţie particulară de aceeaşi formă ca y_h, dar cu c_1 şi c_2 funcţii de x, adică

$$y_p = c_1(x)\cos\omega x + c_2(x)\sin\omega x,$$

Funcţiile $c_1(x)$ şi $c_2(x)$ verifică sistemul

$$\begin{aligned} c_1' \cos\omega x + c_2' \sin\omega x &= 0 \\ -\omega c_1' \sin\omega x + \omega c_2 \cos x &= f(x) \end{aligned}$$

Rezolvînd acest sistem, obţinem

$$c_1' = -\frac{1}{\omega} f(x)\sin\omega x,\ c_2' = \frac{1}{\omega} f(x)\cos\omega x$$

Integrînd, obţinem

$$c_1 = -\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t dt,\ c_2 = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t dt,$$

x_0 fiind un număr oarecare fixat. Soluţia particulară devine

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{1}{\omega}\cos\omega x\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega t dt + \frac{1}{\omega}\sin\omega x\int_{x_0}^{x} f(t)\cos\omega t dt = \\ &= \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt \end{aligned}$$

Se observă imediat că $y_p(x_0) = 0$. Soluţia generală va fi

$$y = y_h + y_p = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt$$

Exemplul 9.19 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + \omega^2 y = A\sin kx,$$

A, k şi ω fiind constante date.

Rezolvare: Soluţia rezultă din exerciţiul precedent, pentru $f(x) = A\sin kx$. În cele ce urmează vom determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene ţinînd cont că termenul liber este un cvasipolinom. Într-adevăr,

$$A\sin kx = e^{0x}\left[0\cdot\cos kx + A\sin kx\right]$$

Parametri cvasipolinomului sunt: $\alpha = 0$, $\beta = k$, $P = 1$ şi $Q = A$. Numărul $\alpha + i\beta = ik$ este rădăcină caracteristică numai când $k = \omega$. În acest caz, forma soluţiei particulare este

$$y_p = x\cdot[a\cos\omega x + b\sin\omega x]$$

Înlocuind în ecuaţia neomogenă, deducem $a = -\frac{A}{2\omega}$ şi $b = 0$. Deci soluţia particulară este $y_p = -\frac{A}{2\omega}x\cos\omega x$.

Când $k \neq \omega$, forma soluţiei particulare este $y_p = a\cos\omega x + b\sin\omega x$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă, deducem $a = 0$ şi $b = \frac{A}{\omega^2 - k^2}$. Deci soluţia particulară este $y_p = \frac{A}{\omega^2 - k^2}\sin kx$.

9.1.9 Ecuaţia diferenţială a lui Euler

Ecuaţia diferenţială a lui Euler este o ecuaţie diferenţială liniară de forma

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = l(x) \tag{9.11}$$

în care $n \in \mathbf{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale, $a_0 \neq 0$, iar termenul perturbator l este o funcţie reală, continuă, definită pe un interval de numere reale pozitive.

Teorema 9.1.15 *Ecuaţia diferenţială a lui Euler se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă* $x = e^t$.

Consecinţe. Din demonstraţie rezultă existenţa numerelor $b_0, b_1, \cdots, b_n$ astfel încât ecuaţia lui Euler (9.11) devine o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = l\left(e^t\right) \tag{9.12}$$

A) Notăm

$$E_n[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k}$$

şi

$$L_n[y] = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{d^j y}{dt^j}$$

Am stabilit egalitatea $E_n[y(x)] = L_n[y(e^t)]$, din care rezultă că soluţiei $y = u(x)$, a ecuaţiei lui Euler (9.11), îi corespunde soluţia $y = u(e^t)$, a ecuaţiei transformate (9.12). Reciproc, soluţiei $y = v(t)$, a ecuaţiei (9.12), îi corespunde soluţia $y = v(\ln x)$. În particular rezultă egalitatea $E_n[x^r] = L_n[e^{rt}]$, pentru $x = e^t$.

B) Avem

$$E_n[x^r] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k (x^r)}{dx^k} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \cdot r(r-1)\cdots(r-k+1) + a_n\right] x^r$$

Funcţia polinomială

$$\phi_n[r] = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \cdot r(r-1)\cdots(r-k+1) + a_n =$$

$$= a_n + a_{n-1} \cdot r + a_{n-2} \cdot r(r-1) + \cdots + a_0 \cdot r(r-1)\cdots(r-n+1)$$

se numeşte polinomul caracteristic al ecuaţiei lui Euler. Deci $E_n[x^r] = \phi_n[r]\,x^r$.

Ecuaţia $\phi_n[r] = 0$; $r \in \mathbf{C}$, se numeşte ecuaţia caracteristică a ecuaţiei lui Euler, iar rădăcinile acestei ecuaţii se numesc rădăcini caracteristice ale ecuaţiei lui Euler. Se observă imediat că dacă r_0 este o rădăcină caracteristică a ecuaţiei lui Euler, atunci $y = x^{r_0}$ este o soluţie a ecuaţiei lui Euler. Pe de altă parte avem

$$L_n\left[e^{rt}\right] = K_n[r]\,e^{rt},$$

unde $K_n[r] = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{n-j}r^j = b_0 + b_1 r + \cdots + b_n r^n$ este polinomul caracteristic al ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$. Deci $\phi_n[r]\,x^r = K_n[r]\,e^{rt}$, pentru $x = e^t$, din care deducem că $\phi_n[r] = K_n[r]$.

C) Rezolvarea ecuaţiei lui Euler (9.11) se face prin intermediul ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi (9.12), dar fără a face calculele efective prin care se obţine această ecuaţie. Determinarea sistemului fundamental de soluţii se face astfel:

1. Formăm polinomul caracteristic $\phi_n[r]$ şi rezolvăm ecuaţia caracteristică.

2. Să presupunem că am obţinut rădăcinile caracteristice $r_1, \ldots, r_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, \ldots, m_p$ $(m_1 + \cdots + m_p = n)$. Deoarece aceleaşi rădăcini caracteristice are şi ecuaţia cu coeficienţi constanţi, rezultă că această ecuaţie are sistemul fundamental de soluţii

$$\begin{array}{llll} e^{r_1 t}, & te^{r_1 t}, & \cdots & , t^{m_1-1}e^{r_1 t}, \\ e^{r_2 t}, & te^{r_2 t}, & \cdots & , t^{m_2-1}e^{r_2 t}, \\ \vdots & & & \\ e^{r_p t}, & te^{r_p t}, & \cdots & , t^{m_p-1}e^{r_p t} \end{array}$$

Sistemul fundamental de soluţii, corespunzător ecuaţiei lui Euler, se obţine înlocuind pe t cu $\ln x$:

$$\begin{array}{llll} x^{r_1}, & x^{r_1}\ln x, & \cdots & , x^{r_1}(\ln x)^{m_1-1}, \\ x^{r_2}, & x^{r_2}\ln x, & \cdots & , x^{r_2}(\ln x)^{m_2-1}, \\ \vdots & & & \\ x^{r_p}, & x^{r_p}\ln x, & \cdots & ,, x^{r_p}(\ln x)^{m_p-1} \end{array}$$

3. Dacă toate rădăcinile caracteristice sunt simple, atunci sistemul fundamental de soluţii este

$$x^{r_1},\ x^{r_2},\ \ldots,\ x^{r_n}$$

4. Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$, şi $m_1 = m_2 = m$, atunci în locul soluţiilor complexe

$$\begin{array}{llll} x^{r_1}, & x^{r_1}\ln x, & \cdots & , x^{r_1}(\ln x)^{m_1-1}, \\ x^{r_2}, & x^{r_2}\ln x, & \cdots & , x^{r_2}(\ln x)^{m_2-1}, \end{array}$$

se consideră soluţiile reale

$$x\alpha\cos(\beta\ln x), \quad (\ln x)\,x\alpha\cos(\beta\ln x), \quad \cdots \quad, (\ln x)^{m-1}x\alpha\cos(\beta\ln x),$$
$$x\alpha\sin(\beta\ln x), \quad (\ln x)\,x\alpha\sin(\beta\ln x), \quad \cdots \quad, (\ln x)^{m-1}x\alpha\sin(\beta\ln x)$$

Aceste soluţii corespund soluţiilor ecuaţiei cu coeficienţi constanţi:

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad te^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad \cdots \quad, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$
$$e^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad te^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad \cdots \quad, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

D) Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene ne bazăm pe sistemul fundamental de soluţii obţinut mai sus şi, în general, folosim metoda variaţiei constantelor pentru a găsi o soluţie particulară. Dacă termenul perturbator are forma

$$l(x) = l\left(e^t\right) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right) =$$

$$= x\alpha\left(P(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q(\ln x)\sin(\beta\ln x)\right)$$

unde α şi β sunt numere reale, iar $P(t)$ şi $Q(t)$ sunt funcţii polinomiale, atunci putem căuta o soluţie particulară y_p de aceeaşi formă cu termenul perturbator, adică

$$y_p = t\rho e^{\alpha t}\left(\tilde{P}(t)\cos\beta t + \tilde{Q}(t)\sin\beta t\right) =$$

$$= (\ln x)\,\rho x\alpha\left[\tilde{P}(\ln x)\cos(\beta\ln x) + \tilde{Q}(\ln x)\sin(\beta\ln x)\right]$$

unde ρ este indicele de rezonanţă ($\rho = 0$ dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină caracteristică, şi $\rho = m$ dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină caracteristică multiplă de ordinul m), iar $\tilde{P}(t)$ şi $\tilde{Q}(t)$ sunt funcţii polinomiale de grade egale cu maximul dintre gradele lui $P(t)$ şi $Q(t)$.

Exemplul 9.20 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 5x$$

Rezolvare: Ecuaţia dată este de tip Euler, prin urmare ecuaţia sa caracteristică este

$$r(r-1) - 4r + 6 = 0,$$

adică $r^2 - 5r + 6 = 0$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem rădăcinile distincte $r_1 = 2$ şi $r_2 = 3$. Acestor rădăcini le corespunde sistemul fundamental de soluţii: $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1x^2 + c_2x^3,$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare.

Determinăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Pentru aceasta observăm că membrul drept, în urma schimbării de variabilă $x = e^t$, devine: $5x = 5e^t$. Pentru ecuaţia cu coeficienţi, constanţi în care se transformă ecuaţia dată, se poate determina o soluţie de aceeaşi formă cu membrul drept: $y_p = Ae^t$. Această soluţie devine, pentru ecuaţia dată, $y = Ax$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă, obţinem $-4xA + 6Ax = 5x$. Deducem imediat $A = \frac{5}{2}$. Soluţia generală cerută este $y = y_h + y_p = c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{5}{2}x$.

Exemplul 9.21 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = \frac{4}{x}$$

Rezolvare: Fiind o ecuaţie de tip Euler, ecuaţia caracteristică a sa este

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1 = 0,$$

adică $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$. Rezolvînd, obţinem: $r_{1,2} = 1$, $r_3 = -1$. Pentru ecuaţia cu coeficienţi constanţi, rezultată din ecuaţia dată în urma schimbării de variabilă $x = e^t$, sistemul fundamental de soluţii este: e^t, te^t, e^{-t}. Acestui sistem îi corespunde, pentru ecuaţia dată, sistemul fundamental: x, $x\ln x$, $\frac{1}{x}$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_h = c_1x + c_2x\ln x + \frac{c_3}{x}$$

Determinăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Pentru aceasta observăm că membrul drept, în urma schimbării de variabilă $x = e^t$, devine: $4e^{-t}$. Ţinînd cont că $4e^{-t}$ este evasipolinom şi că -1 este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, putem determina o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială neomogenă de forma

$$y_p = Ate^{-t},$$

unde A esteo constantă. Revenind la variabila x, avem $y_p = A\frac{\ln x}{x}$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă, obţinem

$$A\frac{11 - 6\ln x}{x} + 2A\frac{-3 + 2\ln x}{x} - A\frac{1 - \ln x}{x} + A\frac{\ln x}{x} = \frac{4}{x},$$

din care, în urma simplificărilor, deducem $A = 1$. Aşadar, am obţinut soluţia particulară $y_p = \frac{\ln x}{x}$. Soluţia generală cerută este

$$y = y_h + y_p = c_1x + c_2x\ln x + \frac{c_3}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

Exemplul 9.22 Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' + 5y' + 13y = 0$$

Rezolvare: Ecuaţia diferenţială dată fiind de tip Euler, ecuaţia sa caracteristică este

$$r(r-1) + 5r + 13 = 0,$$

adică $r^2 + 4r + 13 = 0$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem rădăcinile complexe: $r_{1,2} = -2 \pm 3i$. Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi la care se reduce ecuaţia dată este

$$e^{-2t}\cos 3t,\ e^{-2t}\sin 3t$$

Acestui sistem îi corespunde, pentru ecuaţia Euler dată, sistemul fundamental de soluţii

$$\frac{1}{x^2}\cos(3\ln x),\ \frac{1}{x^2}\sin(3\ln x)$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = \frac{c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)}{x^2},$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare.

9.1.10 Ecuaţia diferenţială a lui Gauss

Ecuaţia

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0,$$

unde a, b, $c \in \mathbf{R}$, $c \notin \mathbf{Z}_-$, se numeşte ecuaţia diferenţială a lui Gauss.

Printr-un calcul oişnuit cu serii de puteri, se verifică imediat că o soluţie a ecuaţiei lui Gauss, în $(-1,1)$, este dată de seria

$$1 + \frac{a \cdot b}{1! \cdot c}x + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n + \cdots$$

Această serie se notează prin ${}_2F_1(a,b;c;x)$ şi se numeşte serie hipergeometrică sau funcţie hipergeometrică.

Notînd $(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$, pentru $n \geq 1$, şi $(t)_0 = 1$, putem scrie

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n$$

Menţionăm câteva proprietăţi ale seriei hipergeometrice:

1). ${}_2F_1(a,b;c;x) = {}_2F_1(b,a;c;x)$;

2) Raza de convergenţă a seriei ${}_2F_1(a,b;c;x)$ este $R=1$;

3) ${}_2F_1(-m,b;c;x)$, unde m este un număr natural, este un polinom de gradul m:

$$ {}_2F_1(-m,b;c;x) = 1 - C_m^1 \frac{b}{c} x + C_m^2 \frac{b(b+1)}{c(c+1)} x^2 + \cdots + (-1)^m C_m^m \frac{b(b+1)\cdots(b+m-1)}{c(c+1)\cdots(c+m-1)} x^m $$

4) ${}_2F_1(-m,b;b;-x) = (1+x)^m$;

5) ${}_2F_1(\alpha,b;b;x) = \dfrac{1}{(1-x)^{\alpha}}$;

6) ${}_2F_1(1,1;2;-x) = \dfrac{1}{x}\ln(1+x)$;

7) $\dfrac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \dfrac{ab}{c}\cdot {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x)$.

Exemplul 9.23 Orice ecuaţie diferenţială de forma

$$ (x-x_1)(x-x_2)y'' + (Ax+B)y' + Cy = 0, $$

unde x_1, x_2, A, B, $C \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, se reduce la ecuaţia lui Gauss prin schimbarea de variabilă $t = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Într-adevăr, avem:

$$ \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x_2-x_1}, \\ y'' &= \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{(x_2-x_1)^2} \end{aligned} $$

Înlocuind în ecuaţia considerată, obţinem:

$$ t(t-1)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(At + \frac{Ax_1+B}{x_2-x_1}\right)\frac{dy}{dt} + Cy = 0, $$

sau

$$ t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(-\frac{Ax_1+B}{x_2-x_1} - At\right)\frac{dy}{dt} - Cy = 0, $$

care este ecuaţia lui Gauss cu parametri a, b şi c daţi prin egalităţile

$$ c = -\frac{Ax_1+B}{x_2-x_1},\ a+b+1 = A,\ ab = C $$

Exemplul 9.24 Să se integreze, cu ajutorul ecuaţiei lui Gauss, ecuaţia diferenţială

$$\left(1-x^2\right)y''-(2\alpha+1)\,xy'+n\,(n+2\alpha)\,y=0,$$

unde α este un număr dat.

Făcînd schimbarea de variabilă $t=\dfrac{x+1}{2}$, avem

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{2},\ y''=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{4}$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem:

$$t\,(1-t)\,\frac{d^2y}{dt^2}-(2\alpha+1)\,(2t-1)\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{2}+n\,(n+2\alpha)\,y=0$$

Aceasta este ecuaţia lui Gauss în care

$$c-(a+b+1)\,t=(2\alpha+1)\cdot\frac{1}{2}-(2\alpha+1)\,t,\ -ab=n\,(n+2\alpha)$$

Deducem imediat $a=-n,\ b=2\alpha+n,\ c=\alpha+\dfrac{1}{2}$. Rezultă că ecuaţia dată admite ca soluţie particulară polinomul de gradul n: $y_1\,(x)={}_2F_1\left(-n,2\alpha+n;\alpha+\dfrac{1}{2};\dfrac{x+1}{2}\right)$.

9.1.11 Ecuaţia lui Bessel

Ecuaţia diferenţială

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\lambda^2\right)y=0, \tag{9.13}$$

unde $\lambda\geq 0$, se numeşte ecuaţia lui Bessel. Soluţiile acestei ecuaţii se numesc funcţii Bessel sau funcţii cilindrice.

Căutînd soluţii de forma $y=x^{\alpha}z$, obţinem ecuaţia

$$x^2z''+(2\alpha+1)\,xz'+\left(x^2+\alpha^2-\lambda^2\right)z=0 \tag{9.14}$$

Într-adevăr, derivatele lui y devin

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}z+x^{\alpha}z',\ y''=\alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}z+2\alpha x^{\alpha-1}z'+x^{\alpha}z''$$

Înlocuind în ecuaţia (9.13) şi simplificînd cu x^{α}, obţinem ecuaţia (9.14).

Consecinţe. 1) Pentru $\alpha = \pm\lambda$, ecuaţia (9.14) capătă forma

$$xz'' + (2\alpha + 1)\, z' + xz = 0 \tag{9.15}$$

2) Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, această ecuaţie se reduce la $z'' + z = 0$ şi are soluţia generală $z = A\cos x + B\sin x$, unde A şi B sunt constante arbitrare. Rezultă imediat că soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

este $y = A\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

În continuare, vom cerceta ecuaţia (9.15) numai pentru $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

Teorema 9.1.16 *Dacă $2\alpha \notin \mathbf{Z}_-$, atunci ecuaţia (9.15) admite soluţia*

$$z = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\,(\alpha+1)_p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

Demonstraţie: Căutăm soluţii de forma $z = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Derivînd şi înlocuind în ecuaţie, obţinem

$$x\sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + (2\alpha+1)\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0,$$

din care, anulînd coeficienţii puterilor lui x, deducem

$$\begin{aligned} (2\alpha + 1)\, a_1 &= 0, \\ (n+1)\,(n+1+2\alpha)\, a_{n+1} &= -a_{n-1},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Din prima relaţie deducem $a_1 = 0$. Relaţia a doua se scrie, separat pentru coeficienţii de ordin impar şi pentru coeficienţii de ordin par, sub forma

$$\begin{array}{ll} 3\,(3+2\alpha)\, a_3 = -a_1 & 2\,(2+2\alpha)\, a_2 = -a_0 \\ 5\,(5+2\alpha)\, a_5 = -a_3 & 4\,(4+2\alpha)\, a_4 = -a_2 \\ \vdots & \vdots \\ (2p+1)\,(2p+1+2\alpha)\, a_{2p+1} = -a_{2p-1} & 2p\,(2p+2\alpha)\, a_{2p} = -a_{2p-2} \end{array}$$

Ţinînd cont că numerele $n+1+2\alpha$ nu sunt nule, oricare ar fi n, deducem că toţi coeficienţii de ordin impar sunt nuli, iar coeficienţii de ordin par sunt daţi de formula

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{4^p p!\,(\alpha+1)_p} a_0,\ p \geq 0$$

Pentru $a_0 = 1$ obţinem soluţia

$$z = \sum_{p\geq 0} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\,(\alpha+1)_p}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

tocmai ceea ce trebuia demonstrat. ■

Vom nota, când α nu este întreg negativ,

$$Z_\alpha = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\,(\alpha+1)_p}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}, \; Y_\alpha = x^\alpha Z_\alpha$$

Raza de convergenţă a seriei fiind

$$R = \lim_{p\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^p}{p!(\alpha+1)_p}}{\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!(\alpha+1)_{p+1}}}\right| = \lim_{p\to\infty}(p+1)\,|\alpha+1+p| = \infty,$$

rezultă că seria este convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Din teoremă rezultă că pentru $2\alpha \notin \mathbf{Z}_-$, Z_α este soluţie a ecuaţiei (9.15).

Consecinţă. Când $2\lambda \notin \mathbf{N}$, ecuaţia lui Bessel (9.13) are soluţiile independente: Y_λ (pentru $\alpha = \lambda$) şi $Y_{-\lambda}$ (pentru $\alpha = -\lambda$). Soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel, în acest caz, este

$$y = AY_\lambda + BY_{-\lambda},$$

unde A şi B sunt constante arbitrare. Menţionăm că Y_λ este soluţie indiferent de valoarea $\lambda \geq 0$ (deoarece $2\alpha = 2\lambda$ nu este întreg negativ).

Cercetăm cazul când $2\alpha \in \mathbf{Z}_-$.

I) Cazul $2\alpha = -(2m+1)$, adică $\alpha = -m - \frac{1}{2}$, unde $m \geq 1$ este un număr natural. Coeficienţii de ordin impar sunt daţi de relaţiile

$$\begin{aligned}
&3\,(3-2m-1)\,a_3 = -a_1\\
&5\,(5-2m-1)\,a_5 = -a_3\\
&\vdots\\
&(2m-1)\,(2m-1-2m-1)\,a_{2m-1} = -a_{2m-3}\\
&(2m+1)\,(2m+1-2m-1)\,a_{2m+1} = -a_{2m-1}\\
&(2m+3)\,(2m+3-2m-1)\,a_{2m+3} = -a_{2m+1}\\
&\vdots\\
&(2m+2p+1)\,(2m+2p+1-2m-1)\,a_{2m+2p+1} = -a_{2m+2p-1},\ p \geq 0
\end{aligned}$$

Deoarece $a_1 = 0$, din primele m relaţii deducem că şi a_3, a_5, $\cdots, a_{2m-1}$ sunt nuli, iar coeficientul a_{2m+1} poate avea orice valoare. Din ultimele p relaţii, prin înmulţire şi simplificare, deducem

$$a_{2m+2p+1} = \frac{(-1)^p}{4^p \cdot p! \left(m + \frac{3}{2}\right)_p} \cdot a_{2m+1}, \ p \geq 0$$

Coeficienţii de ordin par sunt daţi de relaţiile

$$\begin{aligned} 2\,(2 - 2m - 1)\, a_2 &= -a_0 \\ 4\,(4 - 2m - 1)\, a_4 &= -a_2 \\ &, \\ 2p\,(2p - 2m - 1)\, a_{2p} &= -a_{2p-2}, \ p \geq 0 \end{aligned}$$

din care deducem

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{4^p \cdot p! \left(-m + \frac{1}{2}\right)_p} a_0, \ p \geq 0$$

Soluţia obţinută are forma

$$\begin{aligned} z &= \sum_{p\geq 0} a_{2m+2p+1} x^{2m+2p+1} + \sum_{p\geq 0} a_{2p} x^{2p} = a_{2m+1} x^{2m+1} \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p! \left(m + \frac{3}{2}\right)_p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \\ &+ a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p! \left(-m + \frac{1}{2}\right)_p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = a_{2m+1} x^{2m+1} Z_{m+\frac{1}{2}} + a_0 Z_{-m-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

unde a_0 şi a_{2m+1} sunt constante arbitrare.

Consecinţă. Pentru $\lambda = m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbf{N}^*$, ecuaţia (9.13) adică

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \right) y = 0,$$

admite soluţiile

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{m+\frac{1}{2}} Z_{m+\frac{1}{2}} = Y_{m+\frac{1}{2}}, \\ y_2 &= x^{-m-\frac{1}{2}} \left(a_{2m+1} x^{2m+1} Z_{m+\frac{1}{2}} + a_0 Z_{-m-\frac{1}{2}} \right) = a_{2m+1} Y_{m+\frac{1}{2}} + a_0 Y_{-m-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Reţinînd soluţiile independente $Y_{m+\frac{1}{2}}$ şi $Y_{-m-\frac{1}{2}}$, soluţia generală este

$$y = A Y_{m+\frac{1}{2}} + B Y_{-m-\frac{1}{2}}$$

II) Cazul $2\alpha = -2m$, adică $\alpha = -m$, unde $m \geq 1$ este un număr natural.

Coeficienţii de ordin impar sunt daţi de relaţiile

$$\begin{aligned}
&3\,(3-2m)\,a_3 = -a_1\\
&5\,(5-2m)\,a_5 = -a_3\\
&\vdots\\
&(2p+1)\,(2p+1-2m)\,a_{2p+1} = -a_{2p-1},\ p \geq 1
\end{aligned}$$

din care deducem că toţi coeficienţii de ordin impar sunt nuli.

Coeficienţii de ordin par sunt daţi de relaţiile

$$\begin{aligned}
&4\cdot 1\,(1-m)\,a_2 = -a_0\\
&4\cdot 2\,(2-m)\,a_4 = -a_2\\
&\vdots\\
&4\cdot(m-1)\,(m-1-m)\,a_{2m-2} = -a_{2m-4}\\
&4\cdot m\,(m-m)\,a_{2m} = -a_{2m-2}\\
&4\cdot(m+1)\,(m+1-m)\,a_{2m+2} = -a_{2m}\\
&\vdots\\
&4\cdot(m+p)\,(m+p-m)\,a_{2m+2p} = -a_{2m+2p-2},\ p \geq 1
\end{aligned}$$

Din primele m relaţii deducem că $a_{2m-2} = \cdots = a_0 = 0$, iar că a_{2m} este arbitrar. Din ultimele p relaţii deducem că

$$a_{2m+2p} = \frac{(-1)^p}{4^p p!\,(m+1)_p} a_{2m}$$

Soluţia obţinută are forma

$$z = \sum_{p\geq 0} a_{2m+2p} x^{2m+2p} = a_{2m} x^{2m} \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\,(m+1)_p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = a_{2m} x^{2m} Z_m$$

Consecinţă. Pentru $\lambda = m$, $m \in \mathbf{N}^*$, ecuaţia (9.13) adică

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - m^2\right) y = 0,$$

admite soluţiile

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^m Z_m = Y_m,\ (\text{pentru } \alpha = m)\\
y_2 &= x^{-m} a_{2m} x^{2m} Z_m = a_{2m} Y_m\ (\text{pentru } \alpha = -m)
\end{aligned}$$

Observăm că în acest caz soluţiile obţinute nu sunt liniar-independente.

Exemplu 9.25 Considerăm ecuaţia diferenţială

$$x^2y'' + axy' + \left(b + cx^d\right) y = 0,$$

unde a, b, c şi d sunt numere reale.

Dacă $d = 0$, atunci ecuaţia este de tip Euler. Dacă $d \neq 0$, atunci, ecuaţia se reduce la o ecuaţie Bessel printr-o schimbare de variabilă de forma $x = kt^n$ şi printr-o schimbare de funcţie de forma $y = t^m w$. Mai precis, ecuaţia capătă forma

$$t^2\ddot{w} + t\dot{w} + \left(t^2 - \lambda^2\right) w = 0,$$

unde $\lambda^2 = m^2 - bn^2$, dacă

$$n = \frac{2}{d},\ m = \frac{1-a}{d},\ k = \left[\frac{d^2}{4c}\right]^{1/d}$$

Într-adevăr, calculînd derivatele lui y, obţinem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{knt^{n-1}}\frac{d}{dt}\left(t^m w\right) = \frac{1}{knt^{n-1}}\left[mt^{m-1}w + t^m\dot{w}\right] = \frac{m}{kn}t^{m-n}w + \frac{1}{kn}t^{m-n+1}\dot{w} \\ y'' &= \frac{1}{knt^{n-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{kn}t^{m-n}w + \frac{1}{kn}t^{m-n+1}\dot{w}\right) = \frac{m(m-n)}{k^2n^2}t^{m-2n}w + \\ &+\frac{2m-n+1}{k^2n^2}t^{m-2n+1}\dot{w} + \frac{1}{k^2n^2}t^{m-2n+2}\ddot{w} \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{m(m-n)}{n^2}t^m w + \frac{2m-n+1}{n^2}t^{m+1}\dot{w} + \frac{1}{n^2}t^{m+2}\ddot{w} + \\ &+a\frac{m}{n}t^m w + a\frac{1}{n}t^{m+1}\dot{w} + \left(b + ck^d t^{nd}\right) t^m w = 0 \end{aligned}$$

Înmulţim cu n^2 şi simplificînd cu t^m, obţinem

$$t^2\ddot{w} + t\left(2m - n + 1 + an\right)\dot{w} + \left[m^2 - mn + amn + bn^2 + ck^d n^2 t^{nd}\right] w = 0$$

Punînd condiţiile

$$2m - n + 1 + an = 1,\ nd = 2,\ ck^d n^2 = 1,$$

obţinem ecuaţia din enunţ. Analizînd condiţiile puse, deducem imediat

$$n = \frac{2}{d},\ m = \frac{n(1-a)}{2} = \frac{1-a}{d},\ k = \left[\frac{d^2}{4c}\right]^{1/d},$$

ca în enunţ.

9.1.12 Ecuaţia diferenţială a polinoamelor ortogonale

Proprietăţi generale Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $I = (a, b)$ şi $\rho : I \to \mathbf{R}_+$ o funcţie, pe care o vom numi pondere, cu proprietatea

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

pentru orice $x \in I$, unde $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ şi $\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali, iar $|\alpha_1| + |\beta_2| > 0$. Mai presupunem că $\rho(x)\beta(x)$ se anulează pentru $x = a$ şi $x = b$.

Teorema 9.1.17 *1. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, funcţia*

$$Q_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x) \beta^n(x)], \tag{9.16}$$

definită pentru $x \in I$, este o funcţie polinomială de gradul n.

2. $Q_n(x)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\beta(x) y'' + [\alpha(x) + \beta'(x)] y' - n [\alpha_1 + (n+1) \beta_2] y = 0 \tag{9.17}$$

3. Are loc relaţia

$$n, m \in \mathbf{N}, n \neq m \Rightarrow (Q_n, Q_m)_\rho = \int_a^b \rho(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = 0 \tag{9.18}$$

Demonstraţie: 1) Avem:

$$(\rho\beta^n)' = \rho'\beta^n + \rho n \beta^{n-1}\beta' = \rho\frac{\alpha}{\beta}\beta^n + \rho n\beta^{n-1}\beta' = \rho\beta^{n-1}(\alpha + n\beta') = \rho\beta^{n-1} R_{n,1},$$

unde $R_{n,1} = \alpha + n\beta'$ este funcţie polinomială de gradul 1. Prin inducţie matematică se arată că, pentru $0 \leq k < n$, avem

$$(\rho\beta^n)^{(k)} = \rho\beta^{n-k} R_{n,k}\ , \tag{9.19}$$

unde $R_{n,k}$ este funcţie polinomială de gradul k. În consecinţă, pentru $k = n$ obţinem:

$$Q_n = \frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)} = \frac{1}{\rho}\rho\beta^{n-n} R_{n,n} = R_{n,n},$$

unde $R_{n,n}$ este funcţie polinomială de gradul n.

2) Notăm $u = \rho\beta^n$. Avem

$$u' = \rho'\beta^n + \rho n\beta^{n-1}\beta' = \rho\frac{\alpha}{\beta}\beta^n + \rho n\beta^{n-1}\beta' = \rho\beta^{n-1}(\alpha + n\beta') = \frac{u}{\beta}(\alpha + n\beta'),$$

Deducem că $u'\beta = u(\alpha + n\beta')$. Derivăm această egalitate de $n+1$ ori şi obţinem

$$\beta u^{(n+2)} + C_{n+1}^1 \beta' u^{(n+1)} + C_{n+1}^2 \beta'' u^{(n)} = (\alpha + n\beta') u^{(n+1)} + C_{n+1}^1 (\alpha' + n\beta'') u^{(n)} \quad (9.20)$$

Notînd $u^{(n)} = v$, relaţia (9.20) devine succesiv:

$$\begin{aligned} \beta v'' + (\beta' - \alpha) v' - \frac{n+1}{2}(n\beta'' + 2\alpha') v &= 0, \ \textit{sau} \\ \frac{\beta}{\rho} v'' + \frac{\beta' - \alpha}{\rho} v' - \frac{n+1}{\rho}(n\beta_2 + \alpha_1) v &= 0, \ \textit{sau} \\ \left(\frac{\beta}{\rho} v'\right)' - \frac{n+1}{\rho}(n\beta_2 + \alpha_1) v &= 0 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Ţinînd cont că $Q_n = \frac{1}{\rho} v$ şi derivînd, deducem uşor că $\frac{\beta}{\rho} v' = \alpha Q_n + \beta Q_n'$ şi relaţia (9.21) devine succesiv:

$$\begin{aligned} (\alpha Q_n + \beta Q_n')' - (n+1)(n\beta_2 + \alpha_1) Q_n &= 0, \ \textit{sau} \\ \beta Q_n'' + (\beta' + \alpha) Q_n' - n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2] Q_n &= 0, \end{aligned} \quad (9.22)$$

Relaţia (9.22) arată că Q_n este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (??), ceea ce trebuia demonstrat.

3) Calculăm, pentru $k < n$, integrala $\int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx$. Avem:

$$\int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx = \int_a^b x^k (\rho(x)\beta^n(x))^{(n)} dx = x^k (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-1)}\Big|_a^b -$$
$$- \int_a^b k x^{k-1} (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-1)} dx = x^k \rho(x)\beta(x) R_{n,n-1}(x)\Big|_a^b -$$
$$-k \int_a^b x^{k-1} (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-1)} dx = -k \int_a^b x^{k-1} (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-1)} dx$$

Continuînd integrările prin părţi, ţinînd cont de relaţia (9.19) şi de faptul că $\rho(x)\beta(x)$ se anulează pentru $x = a$ şi $x = b$, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx &= (-1)^k k! \int_a^b (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-k)} dx, \\ \int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx &= (-1)^k k! (\rho(x)\beta^n(x))^{(n-k-1)}\Big|_a^b = \\ &= (-1)^k k! \rho(x)\beta^{k+1}(x) R_{n,n-k-1}(x)\Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

Deci $\int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx = 0$. Fie $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$. Putem presupune că $m < n$ fără a micşora generalitatea. Pe de altă parte, am văzut că $Q_m(x)$ este o funcţie polinomială de gradul m. Deci $Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$, cu $q_k \in \mathbf{R}$. Acum

$$\int_a^b \rho(x) Q_m(x) Q_n(x)\, dx = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{k=0}^{m} q_k x^k\right] Q_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m} q_k \int_a^b \rho(x) x^k Q_n(x)\, dx = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţii. 1) Funcţia $a_n Q_n(x)$, unde $a_n \in \mathbf{R}^*$ sunt constante arbitrare, are aceleaşi proprietăţi ca şi $Q_n(x)$.

2) Relaţia (9.18) se exprimă spunînd că polinoamele Q_n şi Q_m sunt ortogonale cu ponderea ρ, pe intervalul (a,b).

3) Ecuaţia (??) se numeşte ecuaţia diferenţială a polinoamelor ortogonale cu ponderea ρ, pe intervalul (a,b).

4) Relaţia (9.16) este cunoscută sub numele de formula lui Rodrigues.

Funcţia generatoare. O funcţie de forma

$$K(x,t) = \sum_{n\geq 0} R_n(x)\, t^n,$$

definită pentru $x \in I$ şi $|t| < r$, se numeşte funcţie generatoare a şirului de polinoame ortogonale $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$. În [28] se demonstrează că funcţia

$$K(x,t) = \frac{\rho(z_1)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1 - t\beta'(z_1)},$$

unde z_1 este rădăcina (zeroul) ecuaţiei $z - x - t\beta(z) = 0$, care este cea mai apropiată de x, este funcţie generatoare pentru şirul de polinoame $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$, dat prin

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\rho(x) \beta^n(x)\right]$$

Vom considera câteva cazuri particulare de polinoame ortogonale.

Polinoame Jacobi. Polinoamele Jacobi, notate $J_n^{(p,q)}(x)$, corespund cazului când $I = (a,b)$, cu a, $b \in \mathbf{R}$, iar $\rho(x) = (x-a)^q (b-x)^p$, unde $p > -1$ şi $q > -1$.

Pentru simplificarea expunerii, considerăm cazul $a = -1$ şi $b = 1$, iar $\rho(x) = (1+x)^q (1-x)^p$. Avem

$$\rho'(x) = q(1+x)^{q-1}(1-x)^p - p(1+x)^q (1-x)^{p-1},$$

din care rezultă

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{q-p-(q+p)x}{1-x^2}$$

Deci $\alpha(x) = q - p - (q+p)x$ şi $\beta(x) = 1 - x^2$. Din teoremă rezultă că funcţia

$$J_n^{(p,q)}(x) = a_n (1+x)^{-q} (1-x)^{-p} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1+x)^{n+q} (1-x)^{n+p}\right],$$

pentru orice $a_n \in \mathbf{R}^*$, este polinom de gradul n şi soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(1-x^2\right) y'' + [q-p-(q+p+2)x] y' + n(n+p+q+1) y = 0$$

O funcţie generatoare a polinoamelor Jacobi este:

$$K(x,t) = 2^{p+q} \left(1+4xt+4t^2\right)^{-1/2} \left(1+2t+\sqrt{1+4xt+4t^2}\right)^{-p} \left(1-2t+\sqrt{1+4xt+4t^2}\right)^{-q}$$

Deci, luînd $a_n = \frac{1}{n!}$, avem

$$x \in (-1,1), |t| < r \Rightarrow K(x,t) = \sum_{n \geq 0} J_n^{(p,q)}(x) t^n,$$

pentru $r > 0$ suficient de mic.

Făcînd schimbarea de variabilă $x = 1 - 2z$, vom reduce ecuaţia diferenţială a polinoamelor Jacobi la o ecuaţie Gauss. Înlocuind

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dz}, \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dz^2}$$

în ecuaţia diferenţială a polinoamelor Jacobi, obţinem ecuaţia Gauss

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [p+1-(p+q+2)z]\frac{dy}{dz} + n(n+1+p+q) y = 0,$$

pentru $a = -n$, $b = n+1+p+q$, $c = p+1$. Rezultă că soluţiile ecuaţiei Gauss, care sunt polinoame, sunt tocmai polinoamele Jacobi. Deci

$$J_n^{(p,q)}(x) = A_n \cdot {}_2F_1\left(-n, n+1+p+q; p+1; \frac{1-x}{2}\right),$$

unde A_n sunt constante arbitrare. Aşadar

$$\begin{aligned} J_n^{(p,q)}(x) &= A_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \cdot (n+1+p+q)_k}{k! \cdot (p+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k = \\ &= A_n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(n+1+p+q)_k}{(p+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Polinoame Legendre. Polinoamele Legendre, notate P_n, sunt definite prin $P_n(x) = J_n^{(0,0)}(x)$, adică sunt polinoame Jacobi corespunzătoare cazului când $p = q = 0$, $I = (a, b)$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, iar $\rho(x) = 1$. Considerînd cazul $a = -1$ şi $b = 1$, avem $\rho(x) = 1$, $\alpha(x) = 0$ şi $\beta(x) = 1 - x^2$. Din teoremă deducem că funcţia

$$P_n(x) = a_n \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1 - x^2\right)^n\right],$$

este polinom de gradul n şi soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Luînd $p = q = 0$ în funcţia generatoare a polinoamelor Jacobi, obţinem funcţia generatoare a polinoamelor Legendre: $K(x, t) = \left(1 + 4xt + 4t^2\right)^{-1/2}$. Deci

$$x \in (-1, 1), |t| < r \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + 4xt + 4t^2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1 - x^2\right)^n\right] \cdot t^n, \tag{9.23}$$

pentru $r > 0$ suficient de mic. Înlocuind $2t$ cu $-\tau$, obţinem

$$x \in (-1, 1), |\tau| < 2r \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\tau + \tau^2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right] \cdot \tau^n$$

Pentru aceste polinoame Legendre, $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]$, folosind funcţia generatoare, prin derivare fie în raport cu t fie în raport cu x şi egalînd coeficienţii puterilor egale, se pot obţine diferite relaţii de recurenţă:

1. $(2n + 1) x P_n(x) - (n + 1) P_{n+1}(x) - n P_{n-1}(x) = 0$,
2. $P'_{n-1}(x) - P_n(x) - 2x P'_n(x) - P'_{n+1}(x) = 0$,
3. $P'_{n-1}(x) + n P_n(x) - x P'_n(x) = 0$,
4. $(n + 1) P_n(x) + x P'_n(x) - P'_{n+1}(x) = 0$,
5. $(2n + 1) P_n(x) - P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 0$,
6. $(1 - x^2) P'_n(x) - n P_{n-1}(x) - n x P_n(x) = 0$.

De exemplu, prima egalitate se obţine derivînd (9.23) în raport cu t. Obţinem

$$\frac{x - t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \left(1 - 2xt + t^2\right) \sum_{n \geq 1} n P_n(x) t^{n-1}$$

Deci

$$(x - t) \sum_{n \geq 0} P_n(x) t^n = \left(1 - 2xt + t^2\right) \sum_{n \geq 1} n P_n(x) t^{n-1}$$

Egalînd puterile lui t^n, obţinem

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x),$$

adică

$$(2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0,$$

după reducerea termenilor asemenea.

Ca soluţii ale unei ecuaţii Gauss, polinoamele Legendre au forma

$$\begin{aligned} P_n(x) &= A_n \cdot {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= A_n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot C_{n+k}^k \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \end{aligned}$$

unde A_n sunt constante arbitrare.

Polinoame ultrasferice (Gegenbauer). Polinoamele ultrasferice, notate $C_n^{(\lambda)}(x)$, sunt polinoame Jacobi pentru $p = q = \lambda - \frac{1}{2}$, cu $\lambda > -\frac{1}{2}$. Deci

$$C_n^{(\lambda)}(x) = J_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

În cazul $a = -1$ şi $b = 1$, rezultă $\rho(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\alpha(x) = -(2\lambda-1)x$, iar $\beta(x) = 1-x^2$. Din teoremă rezultă că funcţia

$$C_n^{(\lambda)}(x) = a_n \cdot \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right],$$

pentru orice $a_n \in \mathbf{R}^*$, este polinom de gradul n şi soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(1-x^2\right)y'' - (2\lambda+1)y' + n(n+2\lambda)y = 0$$

Funcţia generatoare a polinoamelor ultrasferice, cu $a_n = \frac{1}{n!}$, dedusă din funcţia generatoare a polinoamelor Jacobi, este

$$K(x,t) = \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+4xt+4t^2}} \frac{1}{\left(1+2tx+\sqrt{1+4xt+4t^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}$$

Ca soluţii ale unei ecuaţii Gauss, polinoamele ultrasferice au forma

$$\begin{aligned} C_n\lambda(x) &= A_n \cdot {}_2F_1\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= A_n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{(n+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k} \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \end{aligned}$$

unde A_n sunt constante arbitrare.

Polinoame Cebîşev. Polinoamele Cebîşev, notate $T_n(x)$, sunt definite prin $T_n(x) = J_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$, adică sunt polinoame Jacobi corespunzătoare cazului $p = q = -\frac{1}{2}$. În cazul $a = -1$ şi $b = 1$, rezultă $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\alpha(x) = x$ şi $\beta(x) = 1 - x^2$. Din teoremă rezultă că funcţia

$$T_n(x) = a_n \cdot \sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right],$$

pentru orice $a_n \in \mathbf{R}^*$, este polinom de gradul n şi soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2y = 0$$

O funcţie generatoare a polinoamelor Cebîşev se poate deduce din funcţia generatoare a polinoamelor Jacobi, particularizînd $p = q = -\frac{1}{2}$. Observăm însă că prin schimbarea de variabilă $x = \cos t$, ecuaţia diferenţială a polinoamelor Cebîşev devine

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$$

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = c_{1n}\cos nt + c_{2n}\sin nt,$$

unde c_{1n} şi c_{2n} sunt constante arbitrare. Din relaţia

$$\begin{aligned}\cos nt + i\sin nt &= (\cos t + i\sin t)^n = \sum_{k\geq 0,\ k\ par} i^k C_n^k \cos^{n-k} t \sin^k t + \\ &+ i\sum_{k\geq 0,\ k\ impar} i^{k-1} C_n^k \cos^{n-k} t \sin^k t,\end{aligned}$$

deducem

$$\begin{aligned}\cos nt &= \sum_{0\leq j\leq n/2}(-1)^j C_n^{2j}\cos^{n-2j} t\sin^{2j} t = \sum_{0\leq j\leq n/2}(-1)^j C_n^{2j}x^{n-2j}\left(1-x^2\right)^j,\\ \sin nt &= \sum_{1\leq j\leq (n+1)/2}(-1)^{j-1} C_n^{2j-1}\cos^{n-2j+1} t\sin^{2j-1} t = \\ &= \sqrt{1-x^2}\sum_{1\leq j\leq (n+1)/2}(-1)^{j-1} C_n^{2j-1}x^{n-2j+1}\left(1-x^2\right)^{j-1}\end{aligned}$$

Din aceste formule, deducem că $T_n(x)$ se obţine din soluţia generală luînd $c_{2n} = 0$. Aşadar

$$T_n(x) = c_{1n}\cos nt = c_{1n}\cos(n\arccos x) = c_{1n}\sum_{0\leq j\leq n/2}(-1)^j C_n^{2j}x^{n-2j}\left(1-x^2\right)^j$$

Putem determina direct o funcţie generatoare. Pentru $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ avem

$$\begin{aligned} K(x,t) &= \sum_{n\geq 0} T_n(x)\, t^n = \sum_{n\geq 0} \operatorname{Re}\left(e^{int}\right) t^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{n\geq 0} \left(e^{it}t\right)^n\right) = \operatorname{Re}\frac{1}{1-e^{it}t} = \\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{1-t\cos t - it\sin t} = \frac{1-t\cos t}{(1-t\cos t)^2 + t^2\sin^2 t} = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2} \end{aligned}$$

pentru $|t| < 1$ şi orice $x \in [-1,1]$.

Ca soluţii ale unei ecuaţii Gauss, polinoamele Cebâşev au forma

$$\begin{aligned} T_n(x) &= A_n \cdot {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= A_n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{(n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \end{aligned}$$

unde A_n sunt constante arbitrare.

Polinoame Laguerre. Polinoamele Laguerre, notate $L_n(x)$, corespund cazului când $I = (0,\infty)$, iar $\rho(x) = x^{\lambda}e^{-x}$, unde $\lambda \in \mathbf{R}$. Avem $\rho'(x) = \lambda x^{\lambda-1}e^{-x} - x^{\lambda}e^{-x}$. Deci

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\lambda - x}{x},$$

din care rezultă: $\alpha(x) = \lambda - x$, $\beta(x) = x$. Pentru ca $\rho(x)\beta(x) = x^{\lambda+1}e^{-x}$ să se anuleze la capetele intervalului I este suficient să considerăm $\lambda > -1$. Din teorema (1) rezultă că funcţia

$$L_n(x) = a_n x^{-\lambda} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\lambda}e^{-x}\right],$$

pentru orice $a_n \in \mathbf{R}^*$, este polinom de gradul n şi verifică ecuaţia diferenţială

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)\, y' + ny = 0$$

Funcţia generatoare a polinoamelor Laguerre se obţine imediat. Ecuaţia

$$z - x - t\beta(z) = z - x - tz = 0$$

are soluţia $z_1 = \dfrac{x}{1-t}$. Prin urmare

$$K(x,t) = \frac{\rho(z_1)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - t\beta'(z_1)} = \frac{x^{\lambda}(1-t)^{-\lambda} e^{-\frac{x}{1-t}}}{x^{\lambda}e^{-x}} \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-\lambda-1} e^{\frac{xt}{t-1}}$$

Deci, luînd $a_n = \frac{1}{n!}$ în formula polinoamelor Laguerre, obţinem

$$(1-t)^{-\lambda-1} e^{\frac{xt}{t-1}} = \sum_{n\geq 0} L_n(x)\, t^n,$$

pentru orice $x \in (0,\infty)$ şi $|t| < r$, pentru r suficient de mic.

Polinoame Hermite. Polinoamele Hermite, notate $H_n(x)$, corespund cazului când $I = (-\infty, \infty)$, iar ponderea este $\rho(x) = e^{-x^2}$. Avem $\rho'(x) = -2xe^{-x^2}$ şi deci $\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -2x$, din care rezultă $\alpha(x) = -2x$ şi $\beta(x) = 1$. Din teorema (1) deducem că funcţia

$$H_n(x) = a_n \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right],$$

pentru orice $a_n \in \mathbf{R}^*$, este polinom de gradul n şi este soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Funcţia generatoare se obţine imediat. Ecuaţia $z - x - t\beta(z) = 0$ are soluţia $z_1 = x + t$. Deci

$$K(x,t) = \frac{\rho(z_1)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{1 - t\beta'(z_1)} = \frac{e^{-(x+t)^2}}{e^{-x^2}} = e^{-2xt-t^2}$$

Deci, luînd $a_n = \frac{1}{n!}$ în formula polinoamelor Hermite, obţinem

$$e^{-2xt-t^2} = \sum_{n\geq 0} H_n(x)\, t^n,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $|t| < r$, pentru un număr $r > 0$ suficient de mic. Putem obţine din această formulă diverse formule de recurenţă. De exemplu, derivînd în raport cu t, obţinem

$$\sum_{n\geq 0} nH_n(x)\, t^{n-1} = (-2x - 2t)\, e^{-2xt-t^2} = (-2x - 2t) \sum_{n\geq 0} H_n(x)\, t^n$$

Identificînd coeficienţii puterilor egale ale lui t, obţinem

$$\begin{aligned} -2xH_0(x) &= H_1(x), \\ -2xH_n(x) - 2H_{n-1}(x) &= (n+1)\, H_{n+1}(x),\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Din formula lui Rodrigues deducem

$$H_0(x) = \frac{1}{0!} e^{x^2} \frac{d^0}{dx^0}\left[e^{-x^2}\right] = e^{x^2} e^{-x^2} = 1,$$

iar din formula de recurenţă stabilită mai sus putem deducem toate polinoamele din şirul (H_n).

9.2 Exemple din Fizică şi Chimie

Interpretarea mecanică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul doi. Considerăm mişcarea rectilinie a unui punct material M pe axa Ox

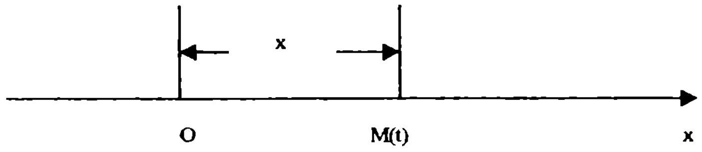

Figura 1

Atunci x, $\frac{dx}{dt}$ şi $\frac{d^2x}{dt^2}$ exprimă poziţia, viteza şi respectiv acceleraţia punctului M la momentul t. Considerăm că forţa care acţionează asupra punctului este dată de o funcţie $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$, depinzînd de timp, de poziţia şi de viteza punctului. Dacă masa punctului material este 1, atunci mişcarea sa pe axa Ox este descrisă de ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

conform legii a doua a lui Newton. Problema se simplifică dacă forţa f este funcţie liniară de poziţia punctului şi de viteza sa, adică atunci când avem ecuaţia diferenţială liniară

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)\,x = r(t)$$

Când coeficienţii $p(t)$ şi $q(t)$ sunt constanţi, atunci putem găsi toate soluţiile prin mijloace elementare (prin cuadraturi, adică prin integrări). În cazul general, chiar când ecuaţia este liniară, nu putem obţine soluţii în mod elementar.

Exemplul 26 Un punct material M de masă m se mişcă rectiliniu către un pun[illegible] [illegible] care este proporţională cu distanţa de la M la O (coeficientul de proporţionalitate fiind $k > 0$). Forţa de rezistenţă a mediului este proporţională cu viteza v a punctului material (coeficientul de proporţionalitate fiind $\lambda > 0$). La momentul iniţial, distanţa de la M la O este egală cu d, iar viteza punctului este îndreptată spre O şi are valoarea v_0. Găsiţi legea de mişcare a punctului în ipoteza $\lambda^2 < 4km$.

Rezolvare: Notăm cu x distanţa de la M la O. Forţa care acţionează asupra punctului material este $F = -kx - \lambda v$ (are sens contrar creşterii lui x). Mişcarea se face după legea a doua a lui Newton; $F = ma$, a fiind acceleraţia punctului material. Deci

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

Ordonînd, avem ecuaţia liniară, cu coeficienţi constanţi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică $mr^2 + \lambda r + k = 0$, obţinem $r_{1,2} = \dfrac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4km}}{2m}$. Notînd $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$ şi $\beta = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \alpha^2}$, avem $r_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$. Soluţia generală este

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right],$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare reale. Deoarece

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}\left[C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right] + e^{-\alpha t}\left[-C_1\beta \sin\beta t + C_2\beta \cos\beta t\right],$$

condiţiile iniţiale, $x(0) = d$ şi $v(0) = v_0$, devin:

$$C_1 = d,\ -\alpha C_1 + \beta C_2 = v_0$$

Rezolvînd, obţinem: $C_1 = d$ şi $C_2 = \dfrac{v_0 + \alpha d}{\beta}$. Legea de mişcare a punctului considerat este

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[d \cos\beta t + \frac{v_0 + \alpha d}{\beta} \sin\beta t\right]$$

Exemplul 27. Un punct material M de masă m se mişcă rectiliniu către un punct fix O sub acţiunea unei forţe de respingere, care este proporţională cu distanţa de la M la O (coeficientul de proporţionalitate fiind $k > 0$). Forţa de rezistenţă a mediului este proporţională cu viteza v a punctului material (coeficientul de proporţionalitate fiind $\lambda > 0$). La momentul iniţial, distanţa de la M la O este egală cu d, iar viteza punctului este îndreptată spre O şi are valoarea v_0. Găsiţi legea de mişcare a punctului.

...ionează asupra punctului material este $F = kx - \lambda v$. Mişcarea se face după legea a doua ... acceleraţia punctului material. Deci

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

Ordonînd, avem ecuaţia liniară, cu coeficienţi constanţi.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică $mr^2 + \lambda r - k = 0$, obţinem rădăcinile reale

$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4km}}{2m}.$$

Notînd $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$ şi $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{k}{m}}$, avem $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta$. Soluţia generală este

$$x(t) = C_1 e^{(-\alpha-\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha+\beta)t},$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare reale. Folosind funcţiile trigonometrice hiperbolice, soluţia se scrie sub forma

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\, ch(\beta t) + B\, sh(\beta t)\right]$$

Deoarece

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}\left[A\, ch(\beta t) + B\, sh(\beta t)\right] + e^{-\alpha t}\left[A\beta\, sh(\beta t) + B\beta\, ch(\beta t)\right],$$

condiţiile iniţiale, $x(0) = d$ şi $v(0) = v_0$, devin:

$$A = d,\ -\alpha A + \beta B = v_0$$

Rezolvînd, obţinem: $A = d$ şi $B = \dfrac{v_0 + \alpha d}{\beta}$. Legea de mişcare a punctului considerat este

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[d\, ch(\beta t) + \frac{v_0 + \alpha d}{\beta}\, sh(\beta t)\right]$$

Exemplul 28. Un tub îngust şi lung se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale, perpendiculare pe el. O bilă de [illegible] de mişcare a bilei în raport cu tubul dacă:

a) la momentul iniţial bila se găseşte la distanţa d de axa de rotaţie avînd viteza nulă.

b) la momentul iniţial bila se găseşte pe axa de rotaţie avînd viteza v_0.

Rezolvare: Asupra bilei acţionează forţa centrifugă $F = mr\omega^2$, r fiind distanţa dintre bilă şi axa de rotaţie. Mişcarea se face după legea a doua a lui Newton; $F = ma$, a fiind acceleraţia bilei. Deci

$$mr\omega^2 = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

Ordonînd, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$$

Deoarece ecuaţia caracteristică $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ are rădăcinile reale $\lambda_{1,2} = \pm\omega$, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei este $r(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}$. Folosind funcţiile trigonometrice hiperbolice, soluţia se scrie sub forma

$$r(t) = A\, ch(\omega t) + B\, sh(\omega t)$$

Deoarece

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\, sh(\omega t) + B\omega\, ch(\omega t),$$

condiţiile iniţiale devin:

a) $r(0) = d = A$, $v(0) = 0 = B\omega$. Aşadar: $A = d$, $B = 0$. Legea de mişcare a bilei este $r(t) = d\, ch(\omega t)$.

b) $r(0) = 0 = A$, $v(0) = v_0 = B\omega$. Aşadar: $A = 0$, $B = \dfrac{v_0}{\omega}$. Legea de mişcare a bilei este $r(t) = \dfrac{v_0}{\omega} sh(\omega t)$.

Exemplul 29. Un tub îngust şi lung se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale, perpendiculare pe el. O bilă de masă m, care se află în tub, alunecă cu frecarea $R = 2m\mu\omega\dfrac{dr}{dt}$, unde r este distanţa dintre bilă şi axa de rotaţie, iar μ este coeficientul de frecare al alunecării. Găsiţi legea de mişcare a bilei în ra[illegible] de axa de rotaţie, iar viteza este v_0.

Rezolvare: Forţa care acţionează asupra bilei are mărimea $F = mr\omega^2 - 2m\mu\omega\dfrac{dr}{dt}$. Ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = mr\omega^2 - 2m\mu\omega\frac{dr}{dt}$$

Ordonînd, obţinem

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 2\mu\omega\frac{dr}{dt} - \omega^2 r = 0$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + 2\mu\omega\lambda - \omega^2 = 0$, obţinem rădăcinile reale

$$\lambda_{1,2} = -\mu\omega \pm \sqrt{\mu^2\omega^2 + \omega^2} = -\mu\omega \pm \omega\sqrt{\mu^2 + 1}$$

Soluţia generală, scrisă cu funcţii hiperbolice, este

$$r(t) = e^{-\mu\omega t}\left[A\, ch\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t + B\, sh\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t\right]$$

Deoarece

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -\mu\omega e^{-\mu\omega t}\left[A\, ch\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t + B\, sh\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t\right] +$$

$$+e^{-\mu\omega t}\left[A\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)\, sh\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t + B\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)\, ch\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t\right],$$

condiţiile iniţiale devin: $r(0) = d = A$, $v(0) = v_0 = -\mu\omega A + B\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)$. Rezolvînd, avem

$$A = d,\ B = \frac{v_0 + \mu\omega d}{\omega\sqrt{\mu^2+1}}$$

Legea de mişcare a bilei este

$$r(t) = e^{-\mu\omega t}\left[d\, ch\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t + \frac{v_0+\mu\omega d}{\omega\sqrt{\mu^2+1}}\, sh\left(\omega\sqrt{\mu^2+1}\right)t\right]$$

Exemplul 30. Un lanţ greu, omogen, de 18 metri, este aruncat peste un cui ne[illegible] [illegible] parte a cuiului s[illegible] află 10 metri de lanţ. După cât timp lanţul cade de pe cui?

[illegible] capetele lanţului agăţat în cui, astfel încât A să fie mai sus decât [illegible] în care lanţul cade de pe cui. Notăm cu $x(t)$ distanţa parcursă de punctul A până la momentul t. La momentul iniţial, asupra lanţului acţionează greutatea a 2 metri de lanţ. [illegible] porţiuni de lanţ de lungime $2+2x(t)$ metri. Dacă m este masa lanţului, atunci forţa care acţionează asupra lanţului la momentul t are valoarea $(2+2x(t))\dfrac{m}{18}g$, g fiind valoarea acceleraţiei gravitaţionale. Ecuaţia diferenţială a mişcării lanţului va fi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (2+2x)\frac{m}{18}g$$

Ordonînd, obţinem ecuaţia diferenţială neomogenă

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{9}x = \frac{g}{9}$$

Rezolvînd ecuaţia caracteristică $\lambda^2 - \dfrac{g}{9} = 0$, obţinem $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{g}}{3}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_h(t) = A\, ch\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right)t + B\, sh\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right)t,$$

unde A şi B sunt constante arbitrare. Deoarece o soluţie particulară este $x_{part}(t) = -1$, soluţia generală a ecuaţie va fi

$$x(t) = A\, ch\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t + B\, sh\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t - 1$$

Condiţiile iniţiale sunt: $x(0) = 0$ şi $v(0) = 0$. Deoarece

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\frac{\sqrt{g}}{3}\, sh\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t + B\frac{\sqrt{g}}{3}\, ch\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t,$$

rezultă $A - 1 = 0$, $B\frac{\sqrt{g}}{3} = 0$, din care $A = 1$ şi $B = 0$. Legea de mişcare a lanţului este

$$x(t) = ch\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t - 1$$

Lanţul cade când $x(t) = 8$, deci $ch\left(\frac{\sqrt{g}}{3}\right) t = 9$, deci $t = 2,739105727$. Aşadar lanţul cade după aproximativ 3 secunde (am luat $g = 10\ m/s^2$).

Exemplul 31. Un punct material de masă m este atras de un centru O cu o forţă [illegible] [illegible]pe din punctul A, aflat la distanţa a de centru, viteza iniţială v_0 perp[illegible] [illegible] OA şi vectorul v_0, sistemul de [r]eferinţă cartezian cu origine[illegible] ca axă Oy. În acest sistem, mişcarea se face conform legii lui Newton, $m\ddot{r} = -kr$, [illegible] $k > 0$ este o constantă, iar $r = (x, y)$ este vectorul de poziţie al punctului mobil. Pe componente ecuaţia devine sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -ky \end{aligned}$$

Soluţiile acestor ecuaţii sunt

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t,\ y = C\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + D\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Condiţiile iniţiale sunt: $r(0) = (a, 0)$ şi $\dot{r}(0) = (0, v_0)$, adică $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ şi $\dot{y}(0) = v_0$. Din aceste condiţii deducem $A = a$, $B = 0$, $C = 0$ şi $D = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$. Traiectoria mişcării este

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t,\ y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

adică elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{mv_0^2}{k}}=1$$

9.3 Exerciţii propuse

1. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale:

   (a) $xy''+y;+x=0$,

   (b) $y^{iv}+y'''=0$,

   (c) $(y'')^2+2y'y'''+1=0$,

   (d) $xyy''+x(y')^2-yy'=0$,

   (e) $xy''-\left(\frac{y}{x}-y'\right)^2=0$,

   (f) $x=\sin y''+y''$,

   (g) $x=e^{y''}+y''$.

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy:

   (a) $y''=x+\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

   (b) $4y'+(y'')^2=4xy''$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

   (c) $1+(y')^2=2yy''$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$;

   (d) $y^2+(y')^2-2yy'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

3. Arătaţi că ecuaţia $xy''-(x+3)y'+y=0$ are soluţiile $y_1=x+3$ şi $y_2=e^x(x^2-4x+6)$, care formează un sistem fundamental de soluţii pe orice interval care nu conţine pe 0.

4. Să se integreze ecuaţia neomogenă $y''+y=x^3$, observînd că ecuaţia omogenă are soluţiile $\cos x$ şi $\sin x$, care formează sistem fundamental de soluţii.

5. Arătaţi că printr-o schimbare de funcţie de forma $y=e^{\alpha(x)}z$, sau printr-o schimbare de variabilă de forma $t=u(x)$, ecuaţia $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ se reduce la forma $y''+I(x)y=g(x)$, sau $\frac{d^2y}{dt^2}+J(t)y=h(t)$, numite forme reduse.

6. Determinaţi soluţiile generale ale ecuaţiilor următoare, reducîndu-le în prealabil la forma redusă:

(a) $y'' - 2xy' + x^2y = 0$;

(b) $x^4y'' + ay = 0$;

(c) $y'' - 2xy' + \left(x^2 - 1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0$.

7. Să se integreze ecuaţia $xy'' - (x+3)\,y' + y = 0$, definită pe orice interval care nu conţine pe 0, observînd că admite soluţia $y_1 = x + 3$.

8. Considerăm ecuaţia $xy'' - (x+3)\,y' + y = 0$.

   (a) Să se arate că ecuaţia are o soluţie polinom în x;

   (b) Să se determine soluţia generală;

   (c) Să se determine soluţia cu condiţiile $y\,(2) = 17$, $y'\,(2) = 8$.

9. Să se integreze ecuaţia $x\,(x-1)\,y'' - (2x-1)\,y' + 2y = e^x\,(x^2 - 3x + 3)$, ştiind că ecuaţia omogenă admite o soluţie de forma $y = Ax + B$, unde A şi B sunt constante.

10. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogene:

    (a) $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$;

    (b) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$;

    (c) $y^{IV} + y = 0$;

    (d) $y^{(6)} - y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 5y'' - y' - 2y = 0$;

    (e) $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 10y^{(4)} - 8y''' + 17y'' - 4y' + 8y = 0$;

11. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene:

    (a) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 16x + 14$;

    (b) $y'' - 5y' + 6y = xe^x$;

    (c) $y''' - 4y'' = 8x^2 + 3$;

    (d) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$;

    (e) $y'' - 5y' + 6y = x\sin 2x$; $y'' - 4y = x\sin x$;

12. Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de ordin superior:

    (a) $a)$ $x'' - 5x' + 4x = 0$; $b)$ $x'' + 2x' + x = 0$; $c)$ $x'' + 4x = 0$.

(b) $a)\ x'' - 4x = t^2 e^{2t}$; $b)\ x'' + 9x = \cos 2t$; $c)\ x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}$.

(c) $a)\ x'' + x = 2t\cos t \cos 2t$; $b)\ x'' - 4x' + 4x = te^{2t}$; $c)\ x'' - 2x = 4t^2 e^{t^2}$.

(d) $a)\ x''' - 13x'' + 12x' = 0$; $b)\ x''' - x' = 0$; $c)\ x''' + x = 0$.

(e) $a)\ x^{IV} + 4x = 0$; $b)\ x''' - 3x'' + 3x' - x = t$; $c)\ x^{IV} + 2x'' + x = 0$.

(f) $a)\ x^{IV} - 2x''' + x'' = e^t$; $b)\ x''' + x'' + x' + x = te^t$; $c)\ x''' + 6x'' + 9x' = t$.

13. Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Euler:

(a) $t^2x'' + 3tx' + x = 0$;

(b) $t^2x'' - tx' - 3x = 0$.

(c) $t^2x'' + tx' + 4x = 0$;

(d) $t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = 0$.

(e) $(3t+2)\,x'' + 7x' = 0$;

(f) $x'' = \dfrac{2x}{t^2}$.

(g) $x'' + \dfrac{x'}{t} + \dfrac{x}{t^2} = 0$;

(h) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$.

(i) $(1+t)^2\,x'' - 3\,(1+t)\,x' + 4x = (1+t)^3$;

(j) $t^2x'' - tx' + x = 2t$.

(k) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$;

(l) $x^3y''' - 3x^2y'' + 8xy' - 20y = 0$;

(m) $x^3y''' + \frac{1}{3}x^2y'' - 3xy' + \frac{16}{3}y = 0$;

(n) $x^4y^{(4)} + 14x^3y''' + 73x^2y'' + 155xy' + 169y = 0$;

(o) $x^3y''' - 9x^2y'' + 36xy' - 60y = 0$;

14. Să se integreze ecuaţia diferenţială $y'' - xy = 0$, cu condiţiile $y\,(0) = 1$ şi $y'\,(0) = 0$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

15. Arătaţi că ecuaţia

$$\left(Ax^2 + Bx + C\right)y'' + (Dx + E)\,y' + Fy = 0,$$

unde A, B, C, D, E şi F sunt numere, se reduce la ecuaţia lui Gauss, cu

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{Dx_2 + E}{x_2 - x_1} = c, \ \frac{D}{A} \cdot a + b + 1, \ \frac{E}{A} = ab,$$

făcînd schimbarea de variabilă $x = x_2 - t\left(x_2 - x_1\right)$, unde x_1 şi x_2 sunt zerourile trinomului $Ax^2 + Bx + C$.

16. Reducînd ecuaţiile

$$\begin{aligned} \left(1 - x^2\right) P_n'' - 2xP_n' + n\left(n+1\right) P_n &= 0, \text{ (Legendre), şi} \\ \left(1 - x^2\right) T_n'' - xT_n' + n^2 T_n &= 0, \text{ (Cebâşev),} \end{aligned}$$

la ecuaţia lui Gauss, să se obţină relaţiile:

$$P_n\left(x\right) =_2 F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \ T_n\left(x\right) =_2 F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

17. Reduceţi ecuaţiile următoare la ecuaţii Bessel şi determinaţi soluţiile lor generale:

   (a) $x^2 y'' + y = 0,$

   (b) $x^2 y'' - 2xy' + 4\left(x^4 - 1\right) y = 0,$

   (c) $4xy'' + 2y' + y = 0.$

Bibliografie

[1] G. Andrei, C. Năstăsescu, I. Otărăşanu, M. Ţena, *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Acad. R.S.R., 1988.

[2] V. I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[3] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[4] A Dragomir şi P. Dragomir, *Structuri Algebrice*. Ed. Facla, Timişoara, 1981.

[5] F. Gândac, *Algebră liniară şi elemente de geometrie analitică şi diferenţială*, Tipografia I. P. Bucureşti, 1980.

[6] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1972.

[7] P. Hartman, *Ordinary Differential equation*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1964.

[8] I. D. Ion şi N. Radu, *Algebră*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1970.

[9] D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1972.

[10] E. Kamke, *Spravocinic po obîknovenîm diferenţialnîm uravmeniam*, Editura "Nauca", Moscova, 1976.

[11] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wiley Publishing Company, 1965.

[12] P. Lankaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York-London,1969.

[13] Gh. Marinescu, *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1963.

[14] Şt. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, vol. I-III, Ed. Univ.Bucureşti, 1999.

[15] V. Olariu, T. Stănăşilă, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Bucureşti, Editura tehnică, 1982.

[16] L. Pontriaguine, *Équations différentielles ordinaires*, Editions Mir-Moscou, 1969.

[17] Ghe. Potcovaru, *Matematici Superioare-Algebră-*, Ed. Univ. Bucureşti, 2000.

[18] Ghe. Potcovaru, *Matematici Superioare-Ecuaţii diferenţiale-*, Ed. Univ. Bucureşti., 2001.

[19] E. Rogai, *Ecuaţii diferenţiale. Exerciţii şi probleme*, Universitatea din Bucureşti, 1984.

[20] A. Rus, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale*, ediţia a doua, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1982.

[21] I. Roşca, *Lecţii de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura Fundaţiei "România de Mâine", Bucureşti, 2000.

[22] N.F.Stepanov şi colab., *Metode ale algebrei liniare în chimia fizică*, Ed. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[23] G.E.Şilov, *Analiză matematică (Spaţii finit dimensionale)*, Ed. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[24] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1982.

[25] C.Udrişte, C.Radu, C.Dicu, O.Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1981.

[26] I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1999.

[27] B.L.Van der Waerden, *Algebra*, (traducere în lb. rusă), Ed. Nauka, Moscva, 1976.

[28] N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, vol. I, Bucureşti, Editura tehnică, 1978.

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 1042/2003 la
Tipografia Editurii Universității din București

plus

ISBN 973–575–743–5

Lei 108000